Муниципальное общеобразовательное учреждение

средняя общеобразовательная школа №14

456910 Челябинская область, г. Сатка

Улица Ленина, 2а

Телефон +7(35161) 43-40-9

**Изучаем комбинаторику**

**вместе с Гарри Поттером**

**Выполнила:** Габбасова Ирина Робертовна

учитель математики МОУ «СОШ» № 14 г.Сатка

Габбасова Евгения

ученица 11класса МОУ «СОШ» № 14 г.Сатка

г.Сатка, 2016 г.

**Краткая аннотация работы «Изучаем комбинаторику вместе с Гарри Потером»**

Проект реализуется в рамках изучения темы «Комбинаторика». Материал направлен на активизацию исследовательской деятельности учащихся.

Возможность выбора индивидуальных заданий позволяет поддерживать интерес к решению задач учащимися с разными способностями. Работа над проектом способствует развитию навыков самостоятельной экспериментальной деятельности и навыков коллективной работы. Проект предполагает творческое освоение ребятами ряда учебных тем, а именно: применение комбинаторики.

В рамках проекта один урок отводится под обсуждение в классе основных теоретических положений по теме, затем идет практическое применение знаний: решение готовых задач из учебника и составление своих комбинаторных задач из повседневной жизни и различных жизненных ситуаций. Ожидается, что самостоятельная работа по проектному методу позволит заинтересовать ребят, в результате чего они лучше овладеют основными теоретическими положениями учебной темы «комбинаторика» и разовьют в себе исследовательские навыки.

**Введение**

Раздел элементарной математики, связанный с изучением количества комбинаций, подчинённых тем или иным условиям, которые можно составить из заданного конечного множества объектов, называется комбинаторикой.

Термин «комбинаторика» был введён в математический обиход Лейбницем, который в 1666 году опубликовал свой труд «Рассуждения о комбинаторном искусстве».

Комбинаторика – важный раздел математики, знание которого необходимо представителям самых разных специальностей. С комбинаторными задачами приходится иметь дело физикам, химикам, биологам, лингвистам, специалистам по кодам и др. Комбинаторные методы лежат в основе решения многих задач теории вероятностей и ее приложений.

С задачами, в которых приходится выбирать предметы, располагать их в определенном порядке и отыскивать среди разных расположений наилучшие, люди столкнулись еще в доисторическую эпоху.

Комбинаторные навыки оказались полезными и в часы досуга. Нельзя точно сказать, когда наряду с состязаниями в беге, метании диска, прыжках появились игры, требовавшие в первую очередь умения рассчитывать, составлять планы и опровергать планы противника.

Среди предметов, положенных в пирамиду, где 35 веков тому назад был похоронен египетский фараон Тутанхамон, нашли разграфленную доску с тремя горизонталями и 10 вертикалями и фигурки для древней игры «сепет», правила которой мы, вероятно, никогда не узнаем. Позже появились нарды, шашки и шахматы, а также их различные варианты.

Работы Паскаля и Ферма ознаменовали рождение двух новых ветвей математической науки комбинаторики и теории вероятностей. Если до них комбинаторные проблемы лишь затрагивались в общих трудах по астрологии, логике в математике, и большей частью относились к области математических развлечений, то уже в 1666г. Готтфрид Вильгельм Лейбниц публикует «диссертацию о комбинаторном искусстве», в которой впервые появляется сам термин «комбинаторный».

Не только азартные игры давали пищу для комбинаторных размышлений математиков. Еще с давних пор дипломаты, стремясь к тайне переписки, изобретали все более и более сложные шифры, а секретные службы других государств пытались эти шифры разгадать.

Сложность строения биологических систем, их строгая иерархичность, взаимослаженность отдельных процессов в целом организме делают биологию благодарным полем для приложения комбинаторных методов. Советский биолог А. А. Любищев полагал даже, что сходство растений и морозных узоров на окнах не случайно в обоих случаях проявляются определенные законы комбинирования частей в единое целое. Модель ДНК. Генетический код. Все это связано с решением комбинаторных задач.

Немного найдется дней в истории науки, сравнимых но своему значению с 17 февраля 1869 г. В этот день из хаоса химических элементов, каждый из которых имел свои свойства, возникла стройная таблица – был открыт периодический закон. Это открытие было сделано Дмитрием Ивановичем Менделеевым, профессором Петербургского университета.

В современной школе изучение комбинаторики начинается с 6 класса. Но большинство детей «боятся» этих задач, считают их сложными.

Чтобы облегчить изучение комбинаторики и вызвать интерес к задачам данного раздела, мы и решили доступным для детей языком изложить азы этого раздела математики и составить сюжетные задачи по мотивам любимой детской книги про Гарри Поттера.

**Цель работы:** изучить правила и формулы комбинаторики и составить сюжетные задачи по мотивам книги про Гарри Поттера.

**Задачи:**

1. Дать теоретические правила и формулы комбинаторики.

2. Составить сюжетные задачи по произведению «Гарри Поттер».

**Теоретическая часть**

**Правило суммы.** Если элемент *a* можно выбрать *m* способами, а элемент *b* (независимо от выбора элемента *a*)— *n* способами, то выбор одного элемента из *a* или *b* можно сделать *m + n* способами.

**Правило произведения.** Если элемент *а* можно выбрать *m* способами, а элемент *b* (независимо от выбора элемента *a*)—*n* способами,то выбор упорядоченного набора (*a,b*) можно сделать *m· n* способами.

***Задача 1****.В лавке в Косой аллее продается пять котлов размера №1, три котла стандартного размера №2 и большой котел размера №3 для обучения зельеварению.*

*Сколькими способами Гарри может купить:*

*а)один котел;*

*б)два одинаковых котла;*

*в)два котла разных размеров;*

*г) один котел не меньше стандартного размера?*

Решение:

А)Воспользуемся правилом суммы. Один котел размера №1можно выбрать пятью способами, размера №2 – тремя способами, размера №3 - одним способами. Итого: 5+3+1=9 способов

Б)Воспользуемся правилом произведения. Выбор двух одинаковых котлов мы можем рассматривать как составление упорядоченных пар котлов одного размера. Выбрать первый котел размера №1 мы можем пятью способами, а выбрать второй котел размера №1 – только четырьмя. Получили .

Выбрать первый котел размера №2 мы можем тремя способами, а выбрать второй котел размера №2 – только двумя. Получили .

Составить пару из котлов размера №3 нам не удастся.

Итого: 20+6=26 способов.

В)Набор из двух разных котлов можно выбрать так:

котел №1 и №2 - 5∙3=15 способами,

котел №1 и №3 - 5∙1=5 способами,

котел №2 и №3 - 3∙1=3 способами.

Итого: 5∙3+5∙1+3∙1=23 способа

Г) И снова воспользуемся правилом суммы: 3+1=4 способа.

***Задача 2****.В библиотеке Хогвартса на полке стоят 4 тома книги «Хогвартс. История волшебства», 12 различных учебников по зельеварению и «Стандартная книга заклинаний». Сколькими способами Гермиона может выбрать:*

*а)одну книгу для чтения;*

*б)две разные книги, если Стандартную книгу заклинаний она уже читала?*

Решение:

а) Одну книгу «Хогвартс. История волшебства» мы можем выбрать четырьмя способами, учебник по зельеварению – двенадцатью способами и «Стандартную книгу заклинаний» одним способом. Значит, используя правило суммы, выбрать одну книгу Гермиона может 4+12+1=17 способами.

б) По правилу произведения: 4∙12=48 способов.

***Задача 3****.У Гермионы четыре разных платья и три разных пары туфель. Собираясь на Святочный бал, она думает, что бы ей надеть. Сколько вариантов нарядов у Гермионы?*

Решение:

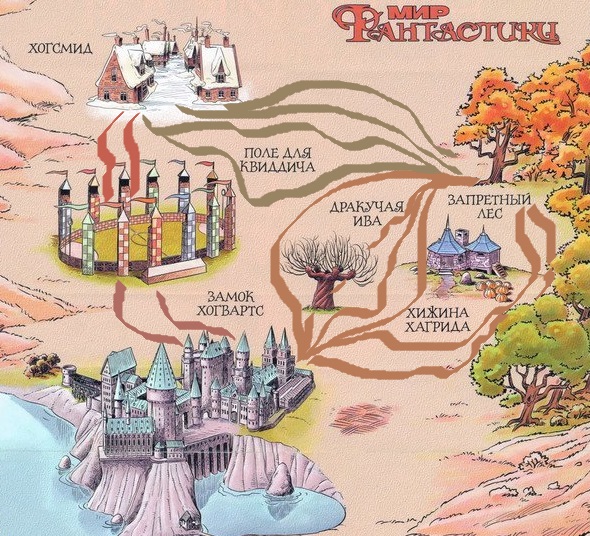
У Гермионы четыре варианта выбора платья и три варианта выбора туфель. Таким образом, у Гермионы возникает 4∙3=12 вариантов выбора наряда на Святочный бал.

***Задача 4****. а) На территории Хогвартса находятся Замок «Хогвартс», деревушка Хогсмид и Запретный лес. Из Замка в Запретный лес ведет 6 дорог, а из Запретного леса в Хогсмид— 4 дороги. Сколькими способами можно проехать от Замка до Хогсмида?*

*б) На территории Хогвартса построили Поле для Квиддича и несколько новых дорог — две из Замка на Поле для Квиддича и две с Поля для Квиддича в Хогсмид. Сколькими способами можно теперь добраться из Замка в Хогсмид?*

Решение:

А) Обозначим дороги буквами и цифрами. Именно, дороги из Замка в Запретный лес назовем 1,2,3,4,5,6, а из Запретного леса в Хогсмид a, b, c, d.



Представим маршруты в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| a | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 |
| b | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 |
| c | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 |
| d | D1 | D2 | D3 | D4 | D5 | D6 |

Всего получаем 4∙6=24способа

Б) Из Замка на Поле для Квиддича ведут две дороги и две с Поля для Квиддича в Хогсмид. Следовательно, из Замка в Хогсмид через Поле для Квиддича ведут 2∙2 дороги. Итого получаем: 2∙2+24=28 способов.

***Задача 5****.У министра Всеобщей магии имеется 3 различных конверта и 5 различных печатей. Сколькими способами он может отправить письмо профессору Дамблдору в конверте с печатью?*

Решение:  
 Отправку письма в конверте с печатью можно представить в виде последовательности двух событий: первое событие – помещение письма в конверт, второе – нанесение печати на конверт. У первого события 3 варианта осуществления, второго – 5. В результате письмо можно отправить3·5=15 способами.

***Задача 6.*** *В Хогвартсе 4 факультета по 4 комнаты на каждый. Профессор Дамболдор хочет осмотреть их все. Сколько у профессора Дамболдора вариантов выбора маршрута?*

Решение*:*

Выбор маршрута включает в себя выбор сначала факультета, а затем конкретной комнаты на факультете. Каждой осмотренной комнате можно поставить в соответствие пару индексов: первый указывает номер факультета, второй – номер комнаты непосредственно на факультете. Тогда число вариантов выбора маршрутов будет равно: .

***Задача 7****. Гарри и Рон играют в волшебные шахматы. Сколькими способами Рону можно поставить двух королей на шахматную доску ?*

Решение:  
Рассмотрим несколько случаев.

Если король стоит в углу, а углов всего 4, то он бьёт 3 поля и стоит на одном - остается 60 клеток для второго короля.

Если король стоит на краю доски, но не в углу (таких возможных позиций 24), то он бьёт 5 полей и стоит на одном - остается свободных 58 клеток для второго короля.

Если же не на краю доски (а таких позиций уже 36), то он бьёт 8 полей и сам стоит на одном - остается 55 клеток.

Ответ: =3612

***Задача 8****.В библиотеке Хогвартса, на трех книжных полках стоят 10 книг по Темным искусствам, 20 книг по приготовлению зелий и 30 книг по левитации. Сколькими способами Гермиона может взять две книги с разных полок?*Решение:



**Теория.** В комбинаторике рассматриваются соединения (наборы) элементов конечных множеств.

Соединения бывают с повторениями и без повторений. Рассмотрим соединения без повторений: пусть дано множество, состоящее из n различных элементов.

***Размещением*** *из n элементов по m(0* называется любое упорядоченное подмножество данного множества, содержащее m элементов.

Два размещения различны, если они отличаются друг от друга, либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Попробуем посчитать число размещений из nэлементов по m. Для этого воспользуемся правилом произведения: на первую позицию в наборе мы можем выбрать один элемент из n, на вторую позицию – из (n-1) оставшихся элементов, на третью – из (n-2)элементов. Соответственно на последнюю позицию в упорядоченном наборе из - оставшихся элементов. Таким образом, число размещений будет равно:

В комбинаторике размещения обозначаются символом , следовательно:

.

Заметим, что

.

В итоге получили:

.

***Перестановкой***  *из n элементов называется размещение из nэлементов по n элементов.*

*Указать конкретную перестановку данного множества, значит выбрать определенный порядок этих элементов. Поэтому любые две перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов. Тогда число перестановок из n элементов можно обозначить, как и посчитать =*

*Для определенности перестановки принято обозначать своим символом*

Если в размещениях пренебречь порядком внутри соединения, то получим новый вид соединения, называемый сочетаниями.

***Cочетанием*** *из n элементов по m (0* называется любое подмножество данного множества, содержащее m элементов.

Любые два сочетания отличаются друг от друга хотя бы одним элементом (т. е. отличаются только составом элементов).

Число сочетаний обозначают символом. Число сочетаний можно рассматривать как число размещений, уменьшенное в число перестановок, т.е. вычисляется по формуле:

.

***Задача*** *9. На третьем курсе Гарри Поттер и его друзья изучают Зельеварение, Прорицание, Древние руны, Защита от темных искусств и Уход за магическими существами. Сколько вариантов расписания можно получить на понедельник?*

***Задача 10.*** *В состав команды по квиддичу входят: три охотника, два загонщика, один ловец и вратарь. Команде Коктеврана требуется новый ловец и загонщик. Сколькими способами можно выбрать из трех ловцов и четверых загонщиков двух новых игроков?*

Решение:

1 ловца можно выбрать способами

1загонщика можно выбрать=4способами

По правилу произведения 3·4=12 способов.

***Задача 11.*** *Во многих заклинаниях используются такие волшебные слова как: Эмобилюс, редукто, експекто, редусемпра, асцензио, редиккулус, патронум, экспелярмус. Сколько заклинаний можно получить, состоящих из двух слов?*

***Задача 12.Сколькими способами можно расставить на полке 12 книг, из которых 5 книг – это сборники заклинаний, так, чтобы сборники стояли рядом?***

Решение:

Сначала примем 5 сборников условно за одну книгу, потому что они должны стоять рядом. Так как в соединении существенным есть порядок, и все элементы используются, значит  это перестановки из 8 элементов (7 книг + условная 1 книга). Их количество Р8. Далее будем переставлять между собой только сборники заклинаний. Это можно сделать Р5 способами. Поскольку нам нужно расставить и сборники, и другие книги, то воспользуемся правилом произведения. Следовательно, Р8· Р5= 8! · 5!. Число способов будет большим, поэтому ответ можно оставить в виде произведения факториалов.

**Ответ: 8! · 5!**

***Задача 13.*** *В библиотеке Хогвартса занимаются 27 человек. Профессор Грюм хочет назначить 3 студентов для уборки книг на полки. Сколькими способами можно это сделать?*

Решение:

 Так как порядок учеников не важен, используем формулу для числа сочетаний (выбор любых 3 элементов из 27):

***Задача 14.****Рон, Гарри и Гермиона хотят узнать у ДракоМалфоя, знает ли он что-нибудь о чудовище, находящемся в Тайной комнате, но они не могут спросить его, потому что считают его наследником Слизерина. Гермиона предлагает использовать оборотное зелье. Для его приготовления нужны необычные ингредиенты, которые можно взять только в коморке профессора Снейпа. Сколькими способами Гермиона может разложить 7 различных ингредиентов по двум карманам?*

***Задача 15.*** *Когда Гарри с Роном ехали на поезде в Хогвартс, им предложили купить что-нибудь сладенького. В тележке со сладостями продавались 15 шоколадных лягушек и 18 коробок леденцов с любым вкусом. Гарри решил купить 3 сладости: себе, Рону и Коросте(крысе Рона), но при этом сладости должны быть одинаковыми. Сколькими способами он может выбрать такие сладости?*

Решение:

По условию, все сладости должны быть одинаковыми. Значит, будем покупать либо 3 шоколадных лягушки, либо 3 коробки леденцов с любым вкусом. В любом случае, k = 3.

В случае с шоколадными лягушками придется выбирать из n = 15 вариантов, поэтому число сочетаний равно C 15 3 =. = 455. Для леденцов же n = 18, а число сочетаний — C 18 3 =. ..= 816.

Поскольку шоколадные лягушки и леденцы — это взаимоисключающие варианты, работаем по закону сложения. Получаем общее число вариантов X = 455 + 816 = 1271. Это и есть ответ.

***Задача 16.*** *Для проведения письменного экзамена по Защите от темных сил надо составить четыре варианта по 7 задач в каждом. Сколькими способами можно разбить 28 задач на 4 варианта?*

Решение:

Задачи для 1 варианта можно выбрать *к=7,п=28 ( остается 21 задача)*

для 2 варианта *к=7,п=21*

для 3 варианта *к=7,п=14*

для 4 варианта *к=7,п=7*

По правилу произведения получаем

Так как варианты равновозможны, то полученное число надо разделить на 4!

**Схема выбора с возращением**

Если при упорядоченной выборке k элементов из n элементы возвращаются обратно, то полученные выборки представляют собой размещения с повторениями. Число всех размещений с повторениями из n элементов по k обозначается символом и вычисляется по формуле:

.

Если при выборке k элементов из n элементы возвращаются обратно без последующего упорядочивания (таким образом, одни и те же элементы могут выниматься по нескольку раз, т.е. повторяться), то полученные выборки есть сочетания с повторениями. Число всех сочетаний с повторениями из n элементов по k обозначается символом и вычисляется по формуле

Пусть в множестве из n элементов есть k различных типов элементов, при этом 1-й тип элементов повторяется раз, 2-й - раз,k-й - раз, причем . Тогда перестановки элементов данного множества представляют собой *перестановки с повторениями.*

Число перестановок с повторениями (иногда говорит о числе разбиений множества) из n элементов обозначается символом

Итоговая сводка формул приведена в следующей таблице.

(1-я строка – без повторений, 2-я строка – с повторениями)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Размещения | Перестановки | Сочетания |
| 1 |  |  |  |
| 2 |  | ) |  |

Задачи из сборника по высшей математике.

***Задача 17****. Хагрид решил подарить мадам Максим гвоздики. В вазе стоят 9 красных и 7 розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать из нее:*

А)3 гвоздики;

Б)6 гвоздик одного цвета;

В)4 красных и розовых гвоздики?

Решение:

А) Т.к. порядок выбора цветов не имеет значения, то выбрать 3гвоздики из вазы, в которой стоят 16 гвоздик, можно =84 способами. По формуле находим:

Б) Выбрать 6 гвоздик красного цвета можно способами, а 6 гвоздик розового цвета способами. По правилу сложения выбрать 6 гвоздик одного цвета (красных ли розовых) можно способом.

В) Выбрать 4 красные гвоздики из 9 имеющихся гвоздик можно способами, а 3 розовых из имеющихся 7 можно способами. Поэтому букет из 4 красных и 3 розовых гвоздик можно составить по правилу умножения способами.

***Задача 18***. *В баре Хогвартса «Три метлы» имеется 7 видов сливочного пива. Сколькими способами можно составить заказ, содержащий 3 сливочныхпива? А если имеются 3 вида сливочного пива, а нужен заказ из 7 кружек сливочного пива?*

***Задача 19.*** *Из слов експелярмус, редукто, аломора составить все размещения и сочетания с повторениями по два элемента.*

***Задача 20.****На полке стоят 12 книг: 3 книги «История волшебства», 2 книги «Заклинания высшего уровня», 5 книг «Уход за магическими существами», 1 книга «Ботаника Гошшака» и 1 книга «Волшебные водоросли высокогорных озер». Сколькими способами можно расставить эти книги на полки?*

**Сочетания с повторениями**. В баре Хогвартса имеется 7 видов сливочного пива. Сколькими способами можно составить заказ, содержащий 3 сливочных пива? А если имеются 3 вида сливочного пива, а нужен заказ из 7 кружек сливочного пива?

Поскольку порядок расположения пива в заказе не играет роли, то искомое число наборов равно числу сочетаний с повторениями из 7 элементов по 3 в каждом по формуле имеем

Если имеется 3 вида пива, а нужен заказ из 7 кружек пива, то число возможных наборов равно

**Размещения с повторениями.** Из слов експелярмус, редукто, аломора составить все размещения и сочетания с повторениями по два элемента.

Их число можно вычислить и по формуле:

Сочетания с повторениями по два элемента таковы (в отличие от размещений здесь порядок элементов в выборке не имеет значения, т.е., например, пары (експелярмус, редукто) и (редукто, експелярмус) не различаются): в фигурных скобках експелярмус,експелярмус; експелярмус,редукто; експелярмус, аломора; редукто,редукто; редукто,аломора; аломора,аломора.

Их число можно вычислить по формуле

**Перестановки с повторениями.** На полке стоят 12 книг: 3 книги «История волшебства», 2 книги «Заклинания высшего уровня», 5 книг «Уход за магическими существами», 1 книга «Ботаника Гошшака» и 1 книга «Волшебные водоросли высокогорных озер». Сколькими способами можно расставить эти книги на полки?

Решение:

n=12,, , ,

Так как книги повторяются, следовательно,

**Вывод:** Мы изучили основные правила и формулы комбинаторики, а также составила сборник сюжетных задач по мотивам произведения «Гарри Поттер».

Литература:

1. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ.— Алфутова Н. Б. Устинов А. В. - М.: МЦНМО, 2002.- 264 с.

2. Виленкин, Н.Я. Комбинаторика / Н.Я.Виленкин. / М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969.- 323 с.

3. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н.Лунгу. - М.: Айрис-пресс, 2008. - 592 с.

4. Халамайзер, А.Я. Комбинаторика и бином Ньютона / А.Я. Халамайзер. – М.: Просвещение, 1980. – 32 с.

5. Яковлев, И. В. Комбинаторика олимпиаднику / И. В. Яковлев. – М.: МЦНМО, 2014. – 72 с.