**Программа элективного курса**

**«Решение задач с экономическим содержанием»**

**Авторы:** Алибаева Ракша Капасовна, учитель математики

Бондарева Лариса Анатольевна, учитель информатики

**2016г.**

**Пояснительная записка**

Содержание образования в школе меняется с учетом обновления социально-экономических потребностей и условий развития общества. Меняются идеалы, ценности, на которые ориентируется учитель, воспитывая личность нового типа. Одно из важнейших потребностей современной школы является воспитание делового человека, компетентного в сфере социально-трудовой деятельности, а также в бытовой сфере. Если раньше экономические проблемы искусственно отодвигались от школьника, и он порою до выпуска из школы оставался в стороне от них, то сегодня жизнь настоятельно требует, чтобы ученик имел развитое экономическое мышление и был готов к жизни в условиях рыночных отношений.

Программа кружка предназначена для учащихся 9-11 классов

**Задачи, которые призвана решить эта программа :**

* формирование основ экономических знаний;
* объяснение взаимосвязей, складывающихся в непосредственном окружении детей;
* освоение первоначальных практических навыков грамотного потребления в обществе с рыночной экономикой;
* формирование навыков решения задач с экономическим содержанием;
* осознание учащимися роли практики в познании.

Курс имеет междисциплинарный характер, показывающий связь математики с экономикой.

**Ожидаемые результаты** :

* знание основных экономических терминов, необходимых школьнику для адаптации в новых хозяйственно-экономических условиях;
* умение пользоваться математическим аппаратом для расчета бюджета семьи, выгодности кредитования, составления бизнес-плана и т.п.;
* адекватная оценка своих потребностей и возможностей учениками;
* выработка навыков экономии и бережливости;
* сознательный выбор учениками профиля обучения в средней школе.

**Требования к уровню освоения содержания курса.** Административной проверки материала не предполагается. Соответственно задания не будут включаться в административные проверочные работы, выноситься на экзамен. В технологии проведения занятий присутствует элемент самопроверки, который предоставляет учащемся возможность самим проверить, как ими усвоен изученный материал. Формой итогового контроля может стать защита группового или индивидуального проекта учащихся по теме.

**Методические рекомендации**

Программа состоит из трех частей.

Первая часть способствует формированию основ экономических знаний. Она является подготовительной для формирования навыков решения задач с экономическим содержанием. Здесь предлагается учащимся самим сформулировать задачи, с которыми они встречаются в жизненных ситуациях.

Вторая часть посвящена решению задач на проценты. Учащиеся обобщают сведения о процентах, подробно знакомятся с историей возникновения термина «процент» и его знака, формируют навыки решения задач на проценты.

Третья часть показывает учащимся, что знание такого понятия, как геометрическая прогрессия, позволяет разобраться в экономических процессах, что школьный курс математики имеет очень большие возможности для анализа многих экономических ситуаций.

**Учебно-тематический план**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Тема и содержание** | **Всего**  **часов** | **Форма контроля** |
| 1. | **Наука экономика.**  1. Организационное занятие  2. Урок-деловая игра «Бюджет семьи»  3. Урок-практикум: вопросы экономики в нашей жизни | 3 | Применение терминов при составлении задач экономического характера |
| 2. | **Процентные вычисления в жизненных ситуациях.**  4. Ох, уж эти проценты!  5-6. Процентные вычисления в жизненных ситуациях  7. Тестирование | 4 | Тестирование |
| 3. | **Геометрическая прогрессия в экономике.**  8. Несколько задач «про цены»  9. Формула сложных процентов в задачах с финансово-экономическим содержанием  10-11. Геометрическая прогрессия в экономике | 4 | Индивидуальные работы учащихся, оформленные с использованием проектного метода |
| 4. | **12. Итоговое занятие.** | 1 | Защита проектов |
|  | **Итого:** | 12 часов |  |

**Урок 1. Организационное занятие. (*Приложение № 1*)**

Термин «экономика» (*раздаточный материал 1)*  ввел в научный оборот выдающийся философ Древней Греции Аристотель (384-322 гг. до н. э.), составив его из двух греческих слов «эйкос» – хозяйство и «номос» – закон. Поэтому «экономика» в переводе с греческого означает «законы хозяйства». Первоначально под словом «экономика» понималось искусство ведения домашнего хозяйства.

Семья выполняет важнейшую экономическую функцию. Совместно проживающие супруги, их дети и родители не просто объединяются для совместного проживания, но и решают важные экономические задачи. Семья находится в постоянных связях с государственными учреждениями, предприятиями и фирмами. Она является важнейшим поставщиком рабочей силы для предприятий и фирм, которые в свою очередь выплачивают им заработную плату, различные социальные пособия, пенсию. Домашние хозяйства являются основными потребителями товаров и услуг, поставляемых предприятиями и частными лицами.

Домашняя экономика (пособие для молодых хозяек) (см. *раздаточный материал 2*).

Расходы семьи за месяц. Учащиеся под руководством учителя составляют таблицу 1.

**Таблица 1.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Расходы** | **Сумма** |
| 1. На питание |  |
| 2. На услуги: транспортные, ремонт обуви, ремонт одежды, парикмахерскую, химчистку и т.д. |  |
| 3. На товары длительного пользования |  |
| 4. На коммунальные услуги: плата за жилье, электроэнергию, газ, воду, канализацию, телефон и т. д. |  |
| 5. На культурно-бытовые нужды: посещение музеев, кинотеатров, театров |  |
| 6. Другие виды расходов: на косметику, гигиенические и моющие средства |  |
| 7. Непредвиденные расходы |  |
| Итого: |  |

*Раздаточный материал 1*

**Основные экономические понятия.**

1. **Экономика –** хозяйственная система, обеспечивающая удовлетворение потребности людей и общества путем создания необходимых жизненных благ.
2. **Ресурсы –** денежные средства, ценности, запасы, физические и интеллектуальные возможности членов семьи.
3. **Потребность –** это осознанная необходимость иметь что-либо материальное или духовное.
4. **Бюджет семьи –** это структура всех доходов и расходов за определенный период времени (месяц или год).
5. Под **доходом** понимаются деньги или материальные ценности, получаемые от предприятия, отдельного лица или какого-либо рода деятельности.
6. **Расход –** затраты, издержки, потребление чего-либо для определенных целей.
7. **Домохозяйство –** экономическая ячейка, состоящая из одного или более лиц, которая снабжает экономику ресурсами (труд, капитал, природные ресурсы) и использует полученные за них деньги для приобретения товаров и услуг, удовлетворяющих собственные потребности.
8. **Заработная плата –** форма материального вознаграждения за труд.
9. **Маркетинг семейный –** процесс планирования и воплощения замысла, ценообразования, продвижения идей, товаров, услуг посредством обмена, удовлетворяющего цели семьи.
10. **Семья –** социальная ячейка общества, члены которой связаны брачными или родственными отношениями, общностью быта и взаимной моральной ответственностью.
11. **Постоянные расходы –** это те, которые в течение года почти не изменяются. Например, плата за кружок или музыкальную школу, плата за завтраки в столовой.
12. **Переменные расходы** включают в себя периодические и единовременные расходы. Например, покупка кассет, пластинок, посещение кино.
13. **Непредвиденные расходы –** это те, которые невозможно учесть. Например, сломались часы, потерялась ручка и т.д.
14. **Уровень благосостояния –** это степень обеспеченности членов семьи товарами, услугами и условиями жизни, необходимыми для комфортного и безопасного существования.

*Раздаточный материал 2*

**Домашняя экономика (пособие для молодых хозяек).**

Содержание:

1. Домашняя экономика.
2. Семья и бизнес.
3. Потребности семьи.
4. Классификация вещей с целью покупки.

1. Экономические функции семьи изучает «Домашняя экономика». Домашняя экономика – это наука о повседневной экономической жизни семьи, направленной на удовлетворение потребностей ее членов, деловой связи с окружающей средой, воспроизводство ее ресурсов, производство товаров и услуг. Домашняя экономика – это умение разобраться со своими потребностями, выбрать оптимальные, эффективные средства их удовлетворения, разумно организовать семейный труд, рассчитать расход денег и времени, быть в меру щедрым и скупым, знать цену трудовой копейки. Перед домашней экономикой стоят следующие задачи:

* + наиболее полное удовлетворение потребностей и желаний всех членов семьи;
  + рациональное использование семейных ресурсов;
  + планирование и экономия средств и времени;
  + применение хозяйственного расчета и научной организации труда в домашней работе.

2. Под предпринимательской деятельностью следует понимать инициативную деятельность человека, который, владея полностью или частично какими-либо материальными и культурными ценностями, использует их для производства товаров и услуг, бизнеса под свою имущественную ответственность. Бизнес – это система отношений, направленных на совершение каких-либо сделок с целью получения прибыли и удовлетворения потребностей их участников. Бизнес в одиночку, без оформления фирмы, предприятия – это самая простейшая форма предпринимательства.

Прибыль – это разница между суммой денег от продажи товаров и услуг и затратами на их производство. Существует бизнес предпринимательский, коммерческий и финансовый.

Предпринимательский бизнес – это деятельность по созданию товаров и услуг, их реализации и получению прибыли. Коммерческий бизнес – это деятельность по продаже товаров и услуг и извлечение в процессе этого прибыли. Финансовый бизнес – это деятельность с ценными бумагами (деньги, акции, облигации и т.д.) и получение прибыли. К личному предпринимательству тесно примыкает семейное, которое следует относить к коллективным формам бизнеса.

3. Потребность – это осознанная необходимость иметь что-либо материальное или духовное. Существуют ложные (неразумные) и рациональные потребности. Следует различать материальные и духовные потребности. К духовным относятся: потребность в культуре, общении, знаниях, искусстве. К материальным относятся: потребность в еде, жилье, одежде. У человека существуют разнообразные потребности и желания. Это такие как: потребность в самореализации, потребность в уважении (уважении со стороны других людей и самоуважении), социальные потребности (потребность в любви, дружбе, общении с людьми), потребность в безопасности, физические потребности.

4. Классификация вещей с целью покупки.

**Таблица 2**

|  |  |
| --- | --- |
| **Уровень потребности** | **Характеристика группы** |
| Срочные и необходимые | Вещи, которые следует купить немедленно. Срочность определяется отсутствием необходимого для жизни или внезапностью нужды |
| Обязательные | Вещи, которые обеспечивают нормальную жизнь семьи и каждого ее члена |
| Желательные, но не обязательные | Вещи улучшенного качества, повышенной комфортности |
| Престижные | Вещи повышенного качества и комфортности |

**Правила покупки.**

1. Изучи конъюнктуру рынка.
2. Старайся приобретать у более надежных продавцов.
3. Сомневаешься в товаре – не покупай.
4. Сохрани чек.
5. Покупая аппаратуру, бытовую технику, проверь ее и заполни гарантийный талон.
6. Проверь качество товара, его работоспособность.

**Литература**

3. Симоненко и др. Технология. Трудовое обучение: Учебник для учащихся 8 класса общеобразовательной школы. / Под ред. В. Д. Симоненко. – М.: «Вентана – Граф», 1999. стр. 7-57.

**Урок – деловая игра. Бюджет семьи. (*Приложение № 2*)**

**План.**

1. Понятие о доходной и расходной частях бюджета.
2. Доходная часть.
3. Расходная часть.

**Цели.**

1. Ознакомить учащихся со структурой потребительского бюджета семьи, составлением баланса доходов и расходов.
2. Сформировать умение коллективно обсуждать рациональность тех или иных затрат и принимать разумное решение.
3. Воспитывать экономичность, бережливость, предприимчивость.
   1. **Организационный момент.**

Игрокам объявляются цели и правила игры. Учащиеся объединяются в команды (семья 1, семья 2). Они самостоятельно разделяют игровые роли: муж, жена, сын. Решается вопрос об общей фамилии.

**Последовательность проведения игры и ее хронометраж**

**Таблица 3**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **Последовательность проведения игры** | **Время (мин.)** |
| 1. | Объявление названия игры, ее целей | 1 |
| 2. | Объединение учащихся в группы-семьи с распределением ролей. Составление характеристики семьи | 5 |
| 3. | Постановка задачи игры | 2 |
| 4. | Составление потребительского бюджета | 10 |
| 5. | Планирование расходной части семейного бюджета | 25 |
| 6. | Анализ хода и результатов игры | 2 |
|  | **Итого:** | **45** |

**2. Проведение игры.**

Участники каждой из групп составляют характеристику семьи, обсуждая вместе вопросы: игровые имена, место работы, профессии, учеба, предполагаемый размер заработной платы, стипендии, пенсии, возможные источники других поступлений, общая сумма ежемесячного дохода семьи.

Все эти данные каждая семья заносит в таблицу 4. Учитель отслеживает правильность заполнения таблицы.

Затем игроки составляют потребительские бюджеты своих семей.

**Таблица 4.**

**Состав семьи 1.**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Семейный статус** | **Возраст** | **Место учебы** | **Размер зарплаты, стипендии** |
| 1. | Муж | 20 лет | Политехнический университет | 300 рублей |
| 2. | Жена | 19 лет | Медицинский  институт | 180 рублей |

**Таблица 5.**

**Состав семьи 2.**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Семейный статус** | **Возраст** | **Место учебы** | **Размер зарплаты, стипендии** |
| 1. | Муж | 42 года | КПТ | 1800 рублей |
| 2. | Жена | 40 лет | МУП  «Водозабор» | 1600 рублей |
| 3. | Сын | 21 год | Экономическая академия | 300 рублей |

**Таблица 6**

**Потребительский бюджет семьи 1**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Доходы** | **Сумма** | **Расходы** | **Сумма** |
| 1. Заработная плата |  | 1. Питание | 1090 |
| 2. Пенсии и стипендии | 480 | 2. Товары длительного пользования |  |
| 3. Выплаты и льготы из общественных доходов |  | 3. Услуги: транспорт, ремонт одежды и обуви | 80 |
| 4. Доходы от приусадебного участка |  | 4. Коммунальные услуги | 180 |
| 5. Доходы от ценных бумаг |  | 5. Культурно-бытовые нужды | 160 |
| 6. Доходы от индивидуальной трудовой деятельности | 850 |  |  |
| 7. Доходы от других источников | 180 |  |  |
| **Итого:** | **1510** | **Итого:** | **1510** |

**Таблица 7**

**Потребительский бюджет семьи 2**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Доходы** | **Сумма** | **Расходы** | **Сумма** |
| 1. Заработная плата | 3400 | 1. Питание | 850 |
| 2. Пенсии и стипендии | 300 | 2. Товары длительного пользования | 1500 |
| 3. Выплаты и льготы из общественных доходов |  | 3. Услуги: транспорт, ремонт одежды и обуви |  |
| 4. Доходы от приусадебного участка | 150 | 4. Коммунальные услуги | 220 |
| 5. Доходы от ценных бумаг |  | 5. Культурно-бытовые нужды | 170 |
| 6. Доходы от индивидуальной трудовой деятельности | 700 | 6. На медицинские расходы | 200 |
| 7. Доходы от других источников | 180 | 7. Дополнительные расходы (машина) | 980 |
|  |  | 8. Уплата налогов | 622 |
| **Итого:** | **4550** | **Итого:** | **4542** |

Учитель объявляет, что семьи могут приступить к планированию предстоящих расходов в расчете на один месяц, исходя из общей суммы предполагаемых доходов. Для этого каждой семье выдается таблица 8, содержащая основные статьи расходов.

**Таблица 8.**

**Расходная часть семейного бюджета семьи 1.**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование**  **статьи расходов** | **Расход, руб.** | **Семейный бюджет, %** | **Потребительс-кий бюджет, %** | **Разница**  **величин, %** |
| 1. Питание | 1090 | 73 | 40 | -33 |
| 2. Товары длительного пользования |  |  | 20 |  |
| 3. Услуги, в том числе транспортные | 80 | 5 | 5 | 0 |
| 4. Коммунальные услуги | 180 | 12 | 25 | 13 |
| 5. Культурно-бытовые нужды:  а) посещение театра  б) предметы личной гигиены  в) канцтовары | 60  100 | 10 | 10 | 0 |
| 6. Прочие расходы |  |  |  |  |
| 7. Непредвиденные расходы |  |  |  |  |
| **Итого:** | **1510** | **100** | **100** | **-20** |

**Таблица 9.**

**Расходная часть семейного бюджета семьи 2.**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование**  **статьи расходов** | **Расход, руб.** | **Семейный бюджет, %** | **Потребительс-кий бюджет, %** | **Разница**  **величин, %** |
| 1. Питание | 850 | 19 | 40 | 21 |
| 2. Товары длительного пользования, в том числе одежда, обувь | 1500 | 33 | 20 | -13 |
| 3. Услуги, в том числе медицинские | 200 | 4,4 | 5 | 0,5 |
| 4. Прочие расходы:  а) обслуживание машины  б) уплата налогов  в) коммунальные услуги | 980  622  220 | 40,2 | 25 | -14,8 |
| 5. Культурно-бытовые нужды:  а) посещение театра  в) канцтовары | 75  95 | 3,4 | 10 | 6,6 |
| **Итого:** | **4542** | **100** | **100** | **0,5** |

Учитель анализирует ход игры и ее результаты. Победителям объявляется та семья, у которой разница в подсчетах будет минимальной. Во время анализа хода игры выявляется роль каждого члена семьи: хорошо ли они знают цены на продовольственные и промышленные товары и услуги, представляют ли они, сколько средств тратит семья на коммунальные услуги и культурно-бытовые нужды и т.д. После обсуждения предоставляется возможность высказаться всем желающим. Выставляются оценки.

**Выводы:** по полученным данным, победителем в данной игре оказалась семья 1, состоящая из 2 человек, так как разница величин в расходной части минимальна (0,5), в отличие от семьи 2 (-20). Игроки семьи 1 лучше спланировали свой потребительский бюджет и расходную часть своего бюджета.

**Домашнее задание:** собрать различный материал, публикуемый в газетах, отражающий экономическую жизнь города и области, на основании которого можно составить задачи.

**Урок 3. Экономика в задачах. (*Приложение № 3*)**

**Цель:** обобщение знаний экономических терминов и умение их применять при составлении задач.

**Задачи:** закрепление навыков работы с натуральными и дробными числами, процентами, знакомство с экономической жизнью села, формирование бережного отношения к народному достоянию, воспитание активной жизненной позиции.

Для работы с учащимися составляются карточки-задания. При составлении заданий учитель использует различные материалы, публикуемые в региональной периодической печати, справочники по сельскому хозяйству, промышленному производству, экономические словари.

Ранее учащимся было предложено собрать материал, чтобы на его основе можно было составить задачи. Учитель предлагает ученикам зачитать собранный материал и вместе с ними составляет задачи, комментирует их, выделяя моменты экономии и бережливости.

Например:

За счет сокращения потерь сырья и материалов Брединский хлебозавод планирует в 2015 г. сэкономить муки на 200 000 руб. Определите прибыль хлебозавода после реализации сверхплановой продукции, если 1 кг муки стоит 22 руб., на выпечку одного батона идет 400 г муки, а батон стоит 25 руб.

Другой способ составления задачи – по готовым плакатам. Учащимся предлагается составить смету подъезда, класса, квартиры, используя данные плаката.

Например:

Какое количество кафельной плитки необходимо для покрытия стен кабинета математики, если размеры плитки 15 см х 22 см? выполните необходимые измерения самостоятельно. Во сколько обойдётся покупка плитки, если каждая плитка стоит 10 руб.?

Вычислите, какое количество краски потребуется для окраски:

а) окон и дверей классного помещения;

б) всего школьного здания при предстоящем (во время летних каникул) ремонте школы?

Сделайте все необходимые измерения.

Указание.Вычисления произведите из расчета 100 г на 1 м².

Особый интерес вызывают у детей практические работы, выполняя которые самостоятельно или с помощью родителей, они могут составить семейный бюджет, подсчитать экономию электроэнергии.

Приведем примеры таких задач.

1. Используя показания счетчика на 1 июня и 1 июля, 1 декабря и 1 января, определите, на сколько больше плата за электроэнергию в один из наиболее темных месяцев года по сравнению с оплатой за один из более светлых месяцев? Стоимость 1кВт·ч энергии равна 34 коп.
2. Первоначально годовой фонд заработной платы столовой составлял 1500000 рублей. После увеличения числа клиентов, штатное расписание было увеличено на 9 человек, а фонд заработной платы возрос до 5250000 рублей. Средняя годовая заработная плата (относительно всех сотрудников) стала больше на 100 000 рублей. Какова стала средняя заработная плата (относительно всех сотрудников) после увеличения годового фонда?

Решение:

*До увеличения числа клиентов:*

Было: *х* (сотр),

Годовой фонд з/п: 1 500 000 руб

Ср.год з/п 1 500 000 : х

*После увеличения числа клиентов:*

Стало: (х+9) (сотр)

Годовой фонд з/п: 5 250 000 руб

Ср.год з/п 5 250 000 : (х+9)

*Составим уравнение:*



Х=22,5 не удовлетворяет условию задачи, следовательно было первоначально 6 сотрудников.

Средняя заработная плата после увеличения годового фонда стала:

5 250 000 : (9+6)=350 000 руб.

Ответ: 350 000 руб.

3.Холдинг «вертолеты России» планирует выпустить в первом квартале 20% годового плана, во втором – увеличить производство в 1,5 раза, в четвертом выпустить 102 вертолета. В третьем квартале, во время отпусков, как показывает статистика, выпускается половина от среднего арифметического количества выпускаемых вертолетов во втором и четвертом кварталах. Какое количество вертолетов планируется выпустить холдингом в третьем квартале?

Решение.

Пусть годовой план: х – 100%

В 1 квартале выпустили: 0,2х вертолетов,

Во 2 квартале: о,2х \*1,5=0,3х вертолетов

В 3 квартале: (102+0,3х):4=25,5+0,075х вертолетов

В 4 квартале по условию 102 вертолета.

Составим уравнение:

25,5+0,075х+0,2х+0,3х=х

0,425х=127,5

Х=300

300 вертолетов – годовой план, значит в 3 квартале планируется выпустить:

(102+0,3\*300):4=48 вертолетов.

Ответ: 48 вертолетов

Воспитание бережливости нельзя сводить только к решению соответствующих задач. Здесь важен весь комплекс проводимых мероприятий. Экскурсии на заводы, школьный «Рейд бережливых» должны дополнять друг друга и одновременно служить материалом для новых задач.

1. Поле уроков в партах нашего класса были оставлены листы бумаги общей массой в 1 кг, если такое будет происходить каждый день, то сколько бумаги будет израсходовано напрасно:
   1. в школе за 210 учебных дней;

б) во всех школах города за этот же период?

Какая часть всей бумаги, произведенной в нашей стране (около 6 тыс. тонн), будет потрачено впустую?

1. После обеда в школьной столовой отходы хлеба составили 1 кг 100 г. Если бы отходы оставались каждый день, то сколько хлеба было бы неправильно использовано в школе за 210 учебных дней?

Какова стоимость этого хлеба, если 1 булка белого хлеба (весом 800 г) стоит 20 руб.? сколько учеников из малообеспеченных семей смогла бы кормить школа на эти средства весь учебный год, если на питание одного школьника требуется 880 руб. в месяц?

1. Измерьте площадь одной страницы учебника.

Определите, каков тираж учебника, и вычислите, сколько бумаги (м²) израсходовано на изготовление всех экземпляров учебника.

Для производства 1000 м² бумаги требуется вырубить лес с  га. С какой площади потребовалось вырубить лес, чтобы выпустить весь тираж учебника?

Решая такие задачи, ребята начинают лучше представлять, во что обходится государству и родителям их обучение, каков масштаб их школьных дел, к чему приводит расточительность и т.д.

Для решения задач по экономической тематике желательно подбирать задания, при решении которых необходимо произвести несложный экономический расчет. В ходе решения этих задач школьники могут уяснить смысл таких понятий, как себестоимость, расценка, прирост продукции, прибыль, рентабельность, сверхплановая продукция.

Например:

Совхоз «Рымникский» продал государству 2,8 тыс. т молока по цене 1500 руб. за тонну. Увеличив затраты на 500 тыс. руб., он получил дополнительно 0,4 тыс. т молока и уровень производства повысился на 4%. Какую прибыль получил колхоз, если за сверхплановую продажу молока была установлена надбавка 30% к закупочным ценам?

Указание. Уровень рентабельности производства определяется отношением получаемой прибыли к затратам*.*

При рассмотрении задач с экономическим содержанием можно использовать и задачи на отыскание наилучшего решения, правда, пока только такие, в которых наилучшее решение можно определить путем сравнения полученных результатов.

Для кормления коров в совхозе «Калининский» требуется произвести 120 тыс. кормовых единиц ячменя или овса. Определите, что выгоднее производить, если известно, что 1 кг овса содержит 1 кормовую единицу, а 1 кг ячменя – 1,21 кормовой единицы и что производство 1 ц овса обходится хозяйству в 8 руб., а 1 ц ячменя в 8 руб. 30коп.?

На примере решения несложных задач можно показать учащимся, как добиться экономии материальных средств, как обеспечить получение данного результата при минимуме затрат или получить максимальный результат, используя известный объем ресурсов.

1. До реконструкции на ферме «Маяк» работало 60 доярок, которые обслуживали 1200 коров. После реконструкции 28 операторов стали обслуживать 1680 коров. Во сколько раз увеличилось число коров, обслуживаемых одним человеком? На сколько возросла производительность труда по сравнению с производительностью труда доярки?
2. За счет сокращения потерь сырья и материалов, внедрения передовой технологии предприятия нашего районного центра планируют сэкономить 17 тыс. кВт·ч электроэнергии. Какую часть составляет экономия Брединского хлебозавода, если он сэкономил 2 тыс. кВт·ч? Сколько процентов составляет экономия хлебозавода, если он сэкономил 2тыс. кВт·ч?
3. В колхозе «Рымникский» собрали с 1 га 60,8 ц кормовых культур. После внедрения нового сорта морозостойких трав, урожай увеличивается на 25%. Сколько кормов собирается теперь с 23 га? На сколько гектаров можно уменьшить посевные площади, чтобы получать прежний объем кормов?

Решения подобных задач помогают учащимся понять, что эффективность общественного производства зависит не только от увеличения выработки продукции, но и от рационального, экономичного использования времени, сырья, материалов, улучшения качества выпускаемой продукции. Ребята убеждаются в том, что экономия – это результат предварительно продуманных действий.

Подводя итог урока, учитель может предложить ученикам воспользоваться составленными на уроке задачами для проведения исследования, о котором шла речь на организационном занятии.

**Литература**

1. Мищук И.Н. Урок-практикум: вопросы экономии в 5-6 классах. //Математика в школе. №8. 2003. стр. 22-23.

**Урок 4. Ох уж, эти проценты. (*Приложение № 4*)**

**Цель:** продемонстрировать практическую ценность математики и активизировать учебную деятельность.

**Задачи:** классификация типичных задач на проценты, ознакомление с историей возникновения термина «процент» и его знака.

Задачам на проценты на уроках математики уделяется недостаточно много времени, чтобы в полном объеме осознать важность применения этого понятия в жизни человека и общества в целом. Этот урок демонстрирует широту применения процентов в повседневной деловой жизни человека.

**Показ презентации «Ох уж, эти проценты!»**

**Из истории процентов.**

Слово «процент» происходит от латинского procentum, что буквально означает «на сотню». В популярной литературе возникновение этого термина связывается с внедрением в Европе десятичной системы счисления в XV в. Однако уже в «Дигестах Юстиниана», датируемых V в., мы находим вполне современное употребление процентов.

«Фиск (императорская казна) не уплачивает проценты по заключенным им договорам, но сам получает проценты: например со съемщиков публичных уборов, если эти съемщики слишком поздно вносят деньги; также при просрочке уплаты налогов. Когда же фиск является преемником частного лица, то обычно он уплачивает проценты.

Если должники, платившие проценты в размере, меньшем чем 6% в год, стали должниками фиска, то они обязаны уплачивать 6% годовых с того времени, как требование против них перешло к фиску».

По-видимому, процент возник в Европе вместе с ростовщичеством как предтеча десятичной системы счисления. Разрыв во времени заставляет вспомнить современные теории о лишних веках общепринятой хронологии.

Употребление термина «процент» в качестве нормы русского языка начинается, вероятно, с конца XVIII в. Об этом свидетельствует сравнительный анализ текстов двух фундаментальных учебников по математике Ефима Войтяховского (первое издание 1795 г.) и Т.Ф. Осиповского (первое издание 1802 г). В обоих учебниках имеется по нескольку задач «на проценты по вкладу», но Е. Войтяховский оперирует исключительно сотыми долями, тогда как Т.Ф. Осиповский уже употребляет термин «процент». Мы воспроизводим три задачи от Е. Войтяховского и Т.Ф. Осиповского с сохранением авторского языка в условиях.

**Задача 1.** Купец торговал положенными в торг 100 рублями с убытком, так что оставшаяся сумма после первого года без 4/25 всего (начального) капитала равна оставшейся сумме после двух лет. Спрашивается: по скольку он получал убытка от 100 руб. каждый год? *Ответ:* 80 или 20 руб.

**Задача 2.** Отдан в ломбард капитал *а* по *p* процентов; проценты сии в ломбард оставляются, причисляя их к капиталу, и сверх сего вносится еще ежегодно по *b* руб. Спрашивается: сколь велик весь капитал будет по истечении *n* лет? *Ответ:* kⁿ · a + ((kⁿ-1) / (k-1)) · b, где k = 1 + p/100.

**Задача 3.** Положим, например, что отдан в ломбард капитал, состоящий из 10 000 рублей по 5 процентов, и ежегодно вносится по 800 рублей. Спрашивается: после 12 лет сколь велик капитал сей будет? *Ответ:* 30 692 руб. 26 коп.

Привычка к употреблению процентов в сфере денежных отношений благоприятствовала быстрому их внедрению в развивающиеся технологии XIX в. Так, в словаре Брокгауза и Ефрона читаем следующее:

«По предварительным данным переписи 1897 г., население Петербурга оказалось возросшим за 6 лет на 178 тысяч, из которых 150 тыс. приходится на прилив извне; из всего прироста 85% падает на крестьян, составляющих теперь до 59% всего петербургского населения».

Как видно из этого отрывка, уже на рубеже XIX и ХХ вв. русскоязычное контекстное понимание процентов максимально лаконизируется. В одном предложении фигурируют две различные стопроцентные базы. В последующем это становится нормой деловой речи и литературы.

Для удовлетворения возрастающих требований к точности исчисления малых долей вместо 1% вводится квант 1/1000 – так называемое *промилле*. Промилле можно часто встретить на страницах книг по медицине и фармакологии, обозначают ‰.

В операциях с ценными металлами используется другое название кванта 1/1000 – проба. Так, золото 750-й пробы – это сплав с 75-процентным содержанием золота.

Знак % произошел, как предполагается, благодаря опечатке. В рукописях procentum часто заменяли словом «cento» (сто) и писали его сокращенно – cto. В 1685 году в Париже была напечатана книга – руководство по коммерческой арифметике, где по ошибке наборщик вместо cto набрал %.

**Понятие процента.**

Проценты употребляются для сравнения однородных *положительных количеств и только для этого.*

*Один процент* – это, по определению, одна сотая: 1%=1/100.

Соответственно, р%=р/100.

*Один процент от количества* А – это, по определению, одна сотая часть от количества А: 1% от А равен 1/100 А.

Соответственно, Р% от А равен р/100 А, (1), где р – безмерное число. Отметим, что предлог *от* часто опускается.

Вместо «В составляет р процентов от А» говорят еще: «Процент В от А есть р», то есть слово «процент» может означать любое количество процентов, но словосочетание «один процент»всегда означает именно одну сотую, так же как словосочетание «двадцать один процент» всегда означает именно двадцать одну сотую и т.д.

Как видно из формулы (1), процентом *р* задается коэффициент k=p/100 перед данным количеством А. говорят еще: «kА больше А в k раз».

Для дальнейшего важно запомнить, что процент всегда выступает в роли коэффициента-сомножителя перед некоторым количеством.

Все задачи на проценты сводятся к разрешению семи шаблонных вопросов **К1-К4**, **П1-П3**, обсуждаемых в двух следующих пунктах.

**Вычисление количеств по процентам.**

Первая группа шаблонных вопросов относится к той ситуации, когда даны количество А и некоторый процент р. требуется найти количество, которое этот процент выражает.

Вопрос **К1**. Каково количество, составляющее р% от А?

Формула ответа: р/100 А.

*Обсуждение.* Здесь ключевое слово *от*. То, что стоит за ним, принимается за базу в 100% и подвергается умножению на коэффициент k=p/100. вопрос **К1** может звучать в несколько другой форме, например, так:

найти р% от А;

или так:

найти р% количества А.

Ключевое слово – предлог *от* – в последней формулировке вопроса **К1** отсутствует. Однако его можно вставить без искажения смысла вопроса и причем вставить в одно единственное место:

найти р% от количества А.

Таким образом, и при явном и при неявном участии ключевого слова *от* в формулировке вопроса **К1** оно имеет свое, однозначно определяемое место. Чтобы понять некоторый вопрос на проценты как вопрос **К1**, нужно это место найти и следующее за ним количество принять за базу в 100%.

Для быстрого ответа на вопрос **К1** нужно знать, что: 5%=1/20, 10%=1/10, 20%=1/5, 25%=1/4, 50%=1/2, 75%=3/4.

**Задача 4.** В городе N состоялись выборы в городскую думу, в которых принимали участие 75% избирателей. Только 10% от числа принявших участие в выборах отдали голоса партии «зеленых». Сколько жителей проголосовали за эту партию, если в городе всего 1 миллион избирателей?

Решение. Здесь мы должны дважды применить формулу ответа на вопрос **К1**. По условию, в выборах приняли участие 0,75 1000 тыс. = 750 тыс. чел. От них 10% – это 0,1 750 тыс. = 75 тыс. *Ответ:* 75 000 тыс.

**Задача 5.** Из 750 учащихся школы 80% занимаются в различных кружках, из них 5% – в радиокружке. Сколько учащихся занимается в радиокружке?

Решение. Дважды применив формулу **К1**, получим 5/100(80/100750)=30.

*Ответ:* 30.

**Задача 6.** Длина дистанции трехдневной велогонки была 480 км. В первый день велогонщики проехали 25% всего пути, а во второй день 55% оставшегося пути. Сколько километров проехали велогонщики в третий день?

Решение. Здесь нужно дважды применить формулу **К1**. В первый день велогонщики проехали 1/4 · 480 = 120 км.

Оставшийся путь составил 480 – 120 = 360 км. Тогда, по условию, во второй день велогонщики проехали 55/100 360 = 198 км. В результате в заключительный третий день велогонщики проехали 480 –120 – 198 = 162 км.

*Ответ:* 162 км.

Вопрос **К2**. Каково количество, р% *от* которого есть А?

Формула ответа: 100/р А.

*Обсуждение.* Вопросы **К1** и **К2** родственны. Пусть искомое количество (в данном случае – это стопроцентная база) есть *х*. Тогда мы находимся в ситуации вопроса **К1**: А = р/100 х.

Отсюда получаем формулу ответа на вопрос **К2**.

Следует владеть и другим способом рассуждения при ответе на вопрос **К2**: если на А приходится р%, то один процент от неизвестного количества есть А/р, соответственно неизвестное количество (искомая стопроцентная база) есть 100 · А/р.

**Задача 7.** При помоле пшеницы получается 80% муки. Сколько пшеницы нужно смолоть, чтобы получить 480 кг пшеничной муки?

Решение. По формуле **К2**  искомое количество пшеницы есть 100/80 \*480 = 600 кг.

*Ответ:* 600 кг.

Вопрос **К3**. Каково количество, большее *чем* А, на р%?

Формула ответа: (1 + р/100) А.

*Обсуждение.* Здесь ключевое слово *чем*. То, что стоит за ним, принимается за базу в 100%. В данном случае стопроцентная база – это А. Разница между неизвестным количеством и базой составляет по условию р% от А, что по формуле ответа на вопрос **К1** дает р/100 А. В результате искомое количество есть А + р/100 А = (1 + р/100) А. Вопрос **К3** может звучать в несколько другой форме, например, найти количество, превосходящее А на р%.

Ключевое слово – *чем* – в последней формулировке вопроса **К3** отсутствует. Чтобы понять некоторый вопрос на проценты как вопросы **К3**, нужно переформулировать некоторый вопрос с участием слова *чем* и следующее за союзом *чем* количество принять за базу в 100%.

Примером кратного употребления вопроса **К3** является вышеприведенная задача 2 и ее частный случай – задача 3.

Вопрос **К4**. Каково количество, меньшее *чем* А, на р%?

Формула ответа: (1 – р/100) А.

*Обсуждение.* Здесь ключевое слово *чем*. То, что стоит за ним, так же, как в предыдущем случае, принимается за стопроцентную базу и т.п.

Если ответ на вопрос **К4** приведет к отрицательному числу, то искомое количество следует считать несуществующим, а сам вопрос некорректным.

Приведенная выше задача 1 решается с помощью тройного применения вопроса **К4**. в самом деле, пусть р – убыток купца от 100 руб. в каждый год. Тогда, по условию, получим уравнение (1 – р/100) · А – 4/25 · А= (1 – р/100)² А ⬄ р² - 10² · р + 16 · 10² = 0 ⬄ р = 50 ± 30.

Чтобы привить устойчивый навык быстрого разрешения вопросов **К1 – К4**, можно предложить учащимся самостоятельно заполнить карандашом следующую таблицу. Каждый засекает время и все действия производит в уме!

**Таблица 10**

**Тренинг-таблица К (с ответами)**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **р%** | **А** | **Количество, составляющее р% от А** | **Количество, р% которого есть А** | **Количество, больше А**  **на р%** | **Количество, меньшее А**  **на р%** |
| 5 | 80 | 4 | 1600 | 84 | 76 |
| 10 | 60 | 6 | 600 | 66 | 54 |
| 20 | 120 | 24 | 600 | 144 | 96 |
| 25 | 36 | 9 | 144 | 45 | 27 |
| 50 | 42 | 21 | 84 | 63 | 21 |
| 75 | 12 | 9 | 16 | 21 | 3 |
| 90 | 90 | 81 | 100 | 171 | 9 |
| 150 | 30 | 45 | 20 | 75 | -45 |

Заполнив таблицу, учащийся сравнивает свой результат с таблицей ответов к тренинг-таблице **К** и вычисляет процент своих правильных ответов. По этому проценту и по продолжительности работы учащийся может сам себе выставить оценку согласно следующей рейтинг-таблице.

**Таблица 11**

**Рейтинг-таблица**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **5 мин.** | **10 мин.** | **15 мин.** | **20 мин.** | **30 мин.** |
| 20% | 3 | 2 | 2 | 2 | 2- |
| 40% | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| 60% | 4 | 4 | 3 | 2 | 2 |
| 80% | 5 | 4 | 4 | 3 | 2 |
| 100% | 5+ | 5 | 5 | 4 | 3 |

Работа над тренинг - таблицей повторяется до получения нужной оценки.

**Вычисление процентов по количествам.**

Вопрос **П1**. Сколько процентов составляет А от В?

Формула ответа: А/В 100%.

*Обсуждение.* Здесь ключевое слово *от*. То, что стоит за ним, принимается за стопроцентную базу и записывается в знаменатель.

**Задача 8.** В одном городе Канады 70% жителей знают французский язык и 80% - английский язык. Сколько процентов жителей этого города знают оба языка?

*Алгебраическое решение.* Исходим из того, что каждый житель города знает хотя бы один из двух языков – английский или французский. Пусть х жителей знают только английский, у – только французский, z – оба языка. Тогда можно дважды увидеть вопрос **П1** и, применив соответствующую формулу, получить

(х+у) / (х+у+z) = 0,8, (у+z) / (x+y+z) = 0,7.

Сложив оба эти равенства, получим

1 + z / (x+y+z) = 1 + 0,5 ⬄ z / (x+y+z) · 100% = 50%,

что по формуле **П1** дает искомый ответ: 50%.

*Геометрическое решение.* Разместим всех жителей города на отрезка 100% так, что знающие английский стоят на отрезке сплошняком слева, а знающие французский – сплошняком справа. Тогда общая часть этих множеств есть отрезок [30%, 80%] «протяженностью» в 50% (убедитесь в этом, сделав рисунок).

**Задача 9.** Из 20-процентного раствора поваренной соли испарилось 25% имеющейся в растворе воды. Найдите концентрацию получившегося раствора.

Решение. Пусть m – начальная масса раствора. По формуле **К1** соль составляет с 20/100 · m. Тогда по формуле **К1** останется воды b = (100-25) / 100 · (m-c) = 3/4 ·(m - 1/5·m) = 3/5 · m. Теперь по формуле **П1** искомый процент равен c / (b+c) · 100% = 1/4 · 100% = 25%. *Ответ:* 25%.

Вопрос **П2.** На сколько процентов А больше, *чем* В?

Формула ответа: (А-В) / В · 100%.

*Обсуждение.* Здесь ключевое слово *чем*. То, что стоит за ним, принимается за стопроцентную базу и записывается в знаменатель.

**Задача 10.** Цены на промышленные и продовольственные товары снизились на 25%. На сколько процентов повысилась реальная заработная плата?

Решение. Мы сами должны догадаться о смысле слова «реальная» применительно к зарплате и сделать определенные предположения для того, чтобы задача получила разумное решение. Представляется естественным считать, что:

* + реальная заработная плата – это сколько товаров V можно купить на зарплату, составляющую S в денежном выражении;
  + в денежном выражении заработная плата не менялась (в противном случае ответ ставится в зависимости от изменения заработной платы).

Опираясь на сказанное, получим: до снижения цен S=Vı · cı; после снижения цен S=V2 · c2, где с1, с2 – соответствующие цены.

По формуле **П2** искомая доля есть (V2-V1) / V1 = (S/c2 – S/c1) / (S/c1) = (c1-c2) / c2.

По формуле **К4** c2 = (1-0,25) · c1 = 3/4c1.

Поэтому искомый процент есть (V2-V1) / V1 · 100% = (c1-3/4c1) / 3/4c1 · 100% = (100/3)%. *Ответ:* на (100/3)%.

Вопрос **П3.** На сколько процентов А меньше, *чем* В?

Формула ответа: (В-А) / В · 100%.

*Обсуждение.* Конструкция ответа аналогична предыдущему случаю. Следует отметить, что при формальных ответах на вопросы **П2** и **П3** могут получаться отрицательные проценты. В деловой сфере отрицательные проценты встречаются крайне редко.

**Задача 11.** Во время предвыборной кампании социологический центр «ЗЕВС» поднял цену социологических исследований на 300%. Но отсутствие спроса заставило вернуться к прежнему уровню цен. На сколько процентов была снижена цена?

Решение. Пусть а – первоначальная цена социологических исследований. Тогда по формуле **К3** цена после повышения станет равна (1 + 300/100) а = 4а. По формуле **П3** процент последующего снижения цены окажется равен (4а-а) / 4а 100% = 75%. *Ответ:* 75%.

Чтобы привить устойчивый навык быстрого разрешения вопросов **П1 – П3**, можно предложить учащимся упражнения со следующей тренинг-таблицей **П**, аналогичное упражнению с тренинг - таблицей **К**. Рейтинг-таблица – общая.

**Таблица 12**

**Тренинг-таблица П (с ответами)**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **А** | **В** | **Сколько % составляет А от В** | **Сколько % составляет В от А** | **На сколько % А больше, чем В** | **На сколько % В больше, чем А** | **На сколько % А меньше, чем В** | **На сколько % В меньше, чем А** |
| 1 | 2 | 50 | 200 | -50 | 100 | 50 | -100 |
| 4 | 1 | 400 | 25 | 300 | -75 | -300 | 75 |
| 4 | 5 | 80 | 125 | -20 | 25 | 20 | -25 |
| 15 | 20 | 75 | 400/3 | -25 | 100/3 | 25 | -100/3 |
| 50 | 10 | 500 | 20 | 400 | -80 | -400 | 80 |

Материал данного урока избыточен. Главное – научить ребят определять тип задач, сформировать навык быстрого заполнения тренинг-таблицы.

**Литература**

1. Барабанова О.О. Задачи на проценты как проблема нормы словоупотребления. //Математика в школе. №5. 2003, стр. 50-54.

**Урок 5-6. Процентные вычисления в жизненных ситуациях. (*Приложение № 5-6*)**

**Цель:** показать широтуприменения в жизни такого простого и известного учащимся математического аппарата, как процентные вычисления.

Перед решением задач полезно проанализировать часто встречающиеся объявления об изменении цен. Объявляя учащимся цель занятия, необходимо подчеркнуть, что сюжеты задач взяты из реальной жизни – из газет, объявлений, документов и т.д. Представленные здесь задачи часто могут быть решены *разными способами*. Важно, чтобы каждый ученик самостоятельно выбрал свой способ решения, наиболее ему удобный и понятный. Подчеркнем также, что при решении задач предполагается использование *калькулятора* – всюду, где это целесообразно. Применение калькулятора снимает непринципиальные технические трудности, позволяет разобрать больше задач. Однако отметим, что в ряде случаев необходимо считать *устно*.

**I. Распродажа.**

**Задача 1.** Зонт стоит 360 р. В ноябре цена зонта была снижена на 15%, а в декабре – еще на 10%. Какой стала стоимость зонта в декабре?

Решение. Стоимость зонта в ноябре составляла 85% от 360 р., т.е. 360 · 0,85 = 306 (р.). Второе снижение цены происходило по отношению к новой цене зонта; теперь следует искать 90% от 306 р., т.е. 306 · 0,9 = 275,4 (р.). *Ответ:* 275 р. 40 к.

*Дополнительный вопрос.* На сколько процентов по отношению к первоначальной цене подешевел зонт?

Решение*.* Найдем отношение последней цены к исходной и выразим его в процентах. Получим 76,5%. Значит, зонт подешевел на 23,5%.

**Задача 2.** На осенней ярмарке фермер планирует продать не менее одной тонны лука. Ему известно, что при хранении урожая теряется до 15% его массы, а при транспортировке – до 10%. Сколько лука должен собрать фермер, чтобы осуществить свой план?

Решение. Просчитаем худший вариант. Пусть нужно собрать х т лука. Тогда после хранения может остаться 0,85х т и на ярмарку будет доставлено 0,9 · 0,85х т. Составим уравнение 0,9 · 0,85х = 1, откуда х = 1,3.

*Ответ:* не менее 1,3 т.

**Задача 3.** На сезонной распродаже магазин снизил цены на обувь сначала на 24%, а потом еще на 10%. Сколько рублей можно сэкономить при покупке кроссовок, если до снижения цен они стоили 593 р.?

Решение. В реальной жизни часто вместо точных подсчетов удобно выполнять прикидку. В нашем случае 593 р. – это примерно 600 р.; а 24% – это примерно 1/4. Четверть от 600 р. составляет 150 р. Таким образом, после второй уценки цена кроссовок снизилась на 150 р. и составила примерно 450 р. После второй уценки новая цена кроссовок снизилась еще примерно на 45 р. В итоге кроссовки подешевели примерно на 195 р.

**Задачи для самостоятельного решения.**

**Задача 4.** Антикварный магазин приобрел старинный предмет за 30 тыс.р. и выставил его на продажу, повысив цену на 60%. Но этот предмет был продан лишь через неделю, когда магазин снизил цену на 20%. Какую прибыль получил магазин при продаже антикварного предмета?

*Ответ:* 8,4 тыс.р.

**Задача 5.** На весенней распродаже в одном магазине шарф стоимостью 350 р. уценили на 40%, а через неделю еще на 5%. В другом магазине шарф той же стоимости уценили сразу на 45%. В каком магазине выгоднее купить этот шарф?

*Ответ:* выгоднее купить во втором магазине.

**Задача 6.** Во время распродажи масляные краски для рисования стоимостью 213 р. за коробку продавали на 19% дешевле. Сколько примерно денег сэкономит художественная школа, если она купит партию в 150 коробок?

*Ответ:* примерно 6 тыс.р.

**II. Тарифы.**

**Задача 7.** В газете сообщается, что с 10 июня согласно новым тарифам стоимость отправления почтовой открытки составит 3 р. 15 к. вместо 2 р. 75 к. Соответствует ли рост цен на услуги почтовой связи росту цен на товары в этом году, который составляет 14,5%?

Решение. Разность тарифов составляет 0,4 р., а ее отношение к старому тарифу равно 0,14545…. Выразив это отношение в процентах, получим примерно 14,5%.

*Ответ:* да, соответствует.

*Дополнительный вопрос.* Сколько будет стоить отправка заказного письма, если сейчас эта услуга оценивается в 5 р. 50 к.? *Ответ:* 6 р. 30 к.

**Задача 8.** Тарифы для мобильных телефонов зависят от системы оплаты. В 2010 г. тарифы оплаты по системам К и М были одинаковыми, а в следующие три года последовательно либо увеличивались, либо уменьшались (см. табл.).

**Таблица 13**

**Сравните тарифы в 2013 г.**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Тарифы** | **Годы** | | |
| **2011** | **2012** | **2013** |
| По системе К | Увеличен на 10% | Уменьшен на 3% | Уменьшен на 3% |
| По системе М | Уменьшен на 5% | Увеличен на 3% | Увеличен на 4% |

Решение. В 2013 г. тариф по системе К увеличился по сравнению с исходным примерно на 3,5%, а по системе М – на 1,8%. Таким образом, тариф по системе К стал примерно выше на 1,7%.

*Пояснение.* Следует обозначить буквой х тарифы М и К в 2010 г., затем последовательно выразить через х все последующие тарифы.

**Задачи для самостоятельного решения.**

**Задача 9.** В начале года тариф за электроэнергию составлял 40 к. за 1 кВт ч. В середине года он увеличился на 50%, а в конце – еще на 50%. как вы считаете, увеличился тариф на 100%, менее чем на 100%, более чем на 100%?

*Ответ:* тариф на электроэнергию увеличился более чем на 100%.

**Задача 10.** Стоимость проезда в городском автобусе составляла 5 р. В связи с инфляцией она возросла на 200%. Во сколько раз повысилась стоимость проезда в автобусе? Можно ли ответить на поставленный вопрос, не зная стоимости проезда? *Ответ:* в 3 раза (пусть учащиеся сделают рисунок).

**Задача 11.** В этом году тарифы на услуги лодочной станции оказались на 20% ниже, чем в прошлом году. Можно ли утверждать, что в прошлом году тарифы были на 20% выше, чем в нынешнем году? *Ответ:* нет.

*Пояснение.* Рисунок поможет убедиться, что в прошлом году тарифы по сравнению с нынешним годом были выше на 25%.

**III. Штрафы.**

**Задача 12.** Занятия ребенка в музыкальной школе родители оплачивают в сбербанке, внося ежемесячно 250 р. Оплата должна производиться до 15-го числа каждого месяца, после чего за каждый просроченный день начисляется пеня в размере 4% от суммы оплаты занятий за один месяц. Сколько придется заплатить родителям, если они просрочат оплату на неделю?

Решение. Так как 4% от 250 р. составляет 10 р., то за каждый просроченный день сумма оплаты будет увеличиваться на 10 р. Если родители просрочат оплату на один день, то им придется заплатить 250 + 10 = 260 (р.), на неделю – 250 + 10 · 7 = 320 (р.).

**Задача для самостоятельного решения.**

**Задача 13.** За несвоевременное выполнение договорных обязательств сотрудник фирмы лишается 25% месячного оклада, и, кроме того, за каждый просроченный месяц к штрафу прибавляется 5% месячного оклада. Оклад сотрудника 10 тыс. р. В каком размере он должен заплатить штраф при нарушении сроков на 5 месяцев?

*Ответ:* 5 тыс. р.

**IV. Голосование.**

**Задача 14.** Из 550 учащихся школы в референдуме по вопросу о введении Ученического совета участвовали 88% учащихся. На вопрос референдума 75% принявших участие в голосовании ответили «да». Какой процент от числа всех учащихся школы составили те, кто ответил положительно?

Решение. Выразим проценты дробями и вычислим число учащихся, утвердительно ответивших на вопрос референдума: 550 · 0,88 · 0,75 = 363 (чел.). Теперь найдем ответ на вопрос задачи: 363 : 550 = 0,66 – это 66%.

*Дополнительный вопрос.* Можно ли ответить на вопрос задачи, не зная числа учащихся школы?

*Ответ:* да.

**Задача для самостоятельного решения.**

**Задача 15.** Собрание гаражного кооператива считается правомочным, если в нем приняли участие 2/3 всех членов, и вопрос считается решенным, если за него проголосовали не менее 50% присутствующих. В гаражном кооперативе 240 человек. На собрании присутствовало 168, а за положительное решение обсуждаемого вопроса проголосовали 86 человек. Какое принято решение?

*Ответ:* положительное.

**Литература**

Курс по выбору для 9 класса «Избранные вопросы математики». //Математика в школе. № 10. 2003. стр. 6-8.

**Урок 7. Тестирование. (*Приложение7*)**

**Цель:** проверка навыка применения процентов в решении задач.

**Вариант 1**

1. Туристы проехали 50% пути на поезде и 40% пути на автобусе. Весь ли путь они проехали?

1. Да.
2. Нет
3. Не знаю

2. В магазине было 800 кг картофеля. Продали 60% картофеля. Сколько килограммов картофеля продано?

1. 480 кг
2. 740 кг
3. 360 кг

3. Фирма в первый месяц выпустила 160 игрушечных автомобилей. В следующем месяце она увеличила выпуск этих игрушек на 200%. Во сколько раз увеличился выпуск игрушечных автомобилей?

1. В 2 раза
2. В 3 раза
3. В 4 раза

4. Оптовая цена товара на складе 5500 руб. Торговая надбавка в магазине составляет 12%. Сколько стоит этот товар в магазине?

1. 6500 руб.
2. 6150 руб.
3. 6160 руб.

5. Весной цена на товар была повышена на 10%, а осенью – еще на 5%. Сколько стоит товар, если его первоначальная стоимость была 3000 руб.?

1. 3465 руб.
2. 3450 руб.
3. 3500 руб.

6. После повышения цены на 30% книга стала стоить 52 руб. Сколько стоила книга до повышения цены?

1. 38 руб.
2. 42 руб.
3. 40 руб.
4. Книга дороже альбома на 25%. На сколько процентов альбом дешевле книги?
   1. На 20%.
   2. На 25%.
   3. На 22%.
5. Антикварный магазин, купив две старинные вазы на общую сумму 360 руб., продал их, получив 25% прибыли. За сколько была продана каждая ваза, если наценка на первую вазу была 50%, а на вторую – 12,5%?
   1. 190 руб., 280 руб.
   2. 180 руб., 270 руб.
   3. 180 руб., 260 руб.

**Вариант 2.**

1. В классе 40% девочек. Кого в классе больше – мальчиков или девочек?
2. Девочек
3. Мальчиков
4. Не знаю

2. В кассе профкома было 9000 руб. На оплату проездных билетов израсходовали 80% этой суммы. Сколько денег израсходовано?

1. 8100 руб.
2. 7200 руб.
3. 8000 руб.

3. В связи с инфляцией стоимость проезда в городском автобусе за полгода возросла на 300%. Во сколько раз повысилась стоимость проезда?

1. В 2 раза
2. В 3 раза
3. В 4 раза

4. Число увеличено на 25%. На сколько процентов нужно уменьшить результат этого увеличения, чтобы получить первоначальное число?

1. На 15%
2. На 20%
3. На 25%

5. Стоимость товара сначала снизили на 12%, а затем новую стоимость снизили еще на 5%. На сколько процентов в общем снижена была стоимость товара?

1. 15,5%
2. 16%
3. 16,4%

6. Цену на пылесос снизили на 10%, в результате чего он стоит теперь 38,7 руб. Сколько стоил пылесос до снижения цены?

1. 38 руб.
2. 43 руб.
3. 40 руб.

7. За пересылку денег по почте с отправителя взимают 2% переводимой суммы. Какую наибольшую сумму денег можно перевести, имея на руках ровно 100 руб.?

1. 98 руб. 3 коп.
2. 99 руб. 50 коп.
3. 98 руб. 6 коп.

8. Две шкурки общей стоимостью 2250 тыс. руб. были проданы на аукционе с прибылью 40%.

Какова стоимость каждой шкурки, если от первой было получено прибыли 25%, а от второй – 50%?

1. 1000 и 1250 тыс. руб.
2. 900 и 1350 тыс. руб.
3. 850 и 1400 тыс. руб.

**Таблица 14**

**Ключ**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Вариант 1** | | | | **Вариант 2** | | | |
| **№ задачи** | **a** | **b** | **c** | **№ задачи** | **a** | **b** | **c** |
| 1 |  | + |  | 1 |  | + |  |
| 2 | + |  |  | 2 |  | + |  |
| 3 |  | + |  | 3 |  |  | + |
| 4 |  |  | + | 4 |  | + |  |
| 5 | + |  |  | 5 |  |  | + |
| 6 |  |  | + | 6 |  | + |  |
| 7 | + |  |  | 7 | + |  |  |
| 8 |  | + |  | 8 |  | + |  |

Если учащиеся не справились с тестом в классе, то можно предложить закончить дома. Итоги подвести на следующем уроке. Лист с ответами сдается учителю, по которому он оценивает результат своей работы.

**Урок 8. Несколько задач «про цены». (*Приложение № 8*)**

На задачи, в которых говорится о ценообразовании, в школьном курсе стали обращать внимание совсем недавно, поэтому методические подходы к их решению не очень хорошо отработаны. А между тем с ценами на товары и услуги люди встречаются каждый день, и именно школьная математика в ответе за то, чтобы эти встречи не оборачивались для людей финансовыми потерями.

Перед решением задач полезно проанализировать часто встречающиеся объявления об изменении цен и выразить их в виде формул, которыми учащиеся будут руководствоваться при решении многих более сложных задач «про цены».

Рассмотрим наиболее типичные ситуации.

**1.** Если первоначальная цена некоторого товара составляла Ао денежных единиц, то после ее *повышения* на х% она составила

Ао + Аo · х · 0,01 = Аo(1 + х · 0,01) (ден. ед.)

Аналогично, если первоначальная цена Ао повысилась на х%, то она составит Аo(1 – х · 0,01) (ден. ед.)

**2.** В результате повышения первоначальной цены Ао на х% и последующего понижения на b% окончательная цена равна

Аo(1 + х· 0,01) (1 – b · 0,01) (ден. ед.)

Аналогично, если первоначальная цена Аo сначала понизилась на х%, а потом повысилась на b%, то окончательная цена равна

Аo(1 - х · 0,01) (1 + b · 0,01) (ден. ед.)

Перед тем как перейти к решению содержательных задач, полезно выполнить несколько задач подготовительного характера. Приведем примеры.

**Задача 1.** Первоначальная цена товара составляла Аo руб., а новая цена А рассчитывается по формуле А = Аo · (1 + х · 0,01). Определите характер изменения первоначальной цены (понижение или повышение) и процент этого изменения.

Предварительно проведенная разъяснительная работа позволяет ученикам без труда ответить на поставленные вопросы: цена повысилась на х%.

**Задача 2.** Новая цена на товар рассчитывается по формуле А = Аo · (1 – 12 · 0,01). Повысилась или понизилась цена на товар и на сколько процентов?

Учащиеся должны твердо знать: знак «минус» в скобках показывает, что цена товара снизилась. Множитель при 0,01 – число 12 – показывает процент изменения цены.

**Задача 3.** Первоначальная цена товара Аo, новая – А. Для определения новой цены пользуются формулой А = Аo + 0,2 · Аo. Определите характер изменения первоначальной цены и процент этого изменения.

Для ответа на вопросы задачи достаточно привести данную в условии запись к стандартной форме. Для этого производятся тождественные преобразования: Аo + 0,2 · Аo = Аo · (1 + 0,2) = Аo · (1 + 20 · 0,01). Полученное выражение позволяет без труда ответить на поставленные в задаче вопросы: первоначальная цена повысилась на 20%.

Конечно, способные ребята уже по исходному выражению смогут определить и характер изменения первоначальной цены, и процент этого изменения. Но вместе с тем, как показывает практика, указанный выше алгоритм действия не является лишним и для них, особенно в условиях, когда время выполнения задания ограничено.

**Задача 4.** Цена на товар сначала снизилась на 5%, а затем повысилась на 5%. Изменилась ли первоначальная цена, и если да, то на сколько процентов?

Решение задачи лучше сначала обсудить устно, тем более что самые нетерпеливые сразу дадут ответ: «Первоначальная цена не изменилась». Лучшие ученики рассуждают примерно так: «Та денежная сумма, которая приходится на 5% при понижении цены, больше той, которая приходится на 5% при повышении. Значит, исходная цена понизилась». Чтобы найти процент понижения, такие ученики переходят к необходимым вычислениям.

Вычисления учащиеся выполняют постепенно:

А = Аo · (1 – 5 · 0,01)(1 + 5 · 0,01) = Аo · (1 – 25 · 0,0001) = Аo · (1 – 0,25 · 0,01).

Полученная стандартная форма записи показывает, что первоначальная цена понизилась на 0,25%.

Получив ответ на вопрос задачи, можно обсудить, например, изменится ли результат, если в задаче цена сначала повысится на 5%, а затем понизится на 5%. Очень быстро школьники приходят к выводу, что результат изменения первоначальной цены не зависит от порядка произведенных преобразований и в этом случае первоначальная цена понизится на 0,25%.

Теперь можно перейти к более содержательным задачам.

**Задача 5.** Цена некоторого товара поднялась на 25%, а потом еще на 30%. Другой товар поднялся в цене на 30% и стал по цене равен первому товару. Какова первоначальная цена первого товара, если второй до повышения цены стоил 1,25 тыс. руб.?

Обозначим искомую цену первого товара через х руб. Ученики составляют уравнение х · (1 + 25 · 0,01) · (1 + 30 · 0,01) = 1,25 · (1 + 30 · 0,01) и без труда находят его корень: х=1, т.е. первоначальная цена первого товара составляла 1 тыс. руб.

**Задача 6.** Некоторый товар стоил 3150 руб. После двух последовательных снижений цены он стал стоить 1512 руб. Сколько стоил товар после первого снижения, если второе снижение было на 20 процентных единиц больше, чем первое?

Примем за х процент первого снижения цены, тогда процент второго снижения – (х+20). Составим уравнение 3150 · (1 – х · 0,01) · (1 – (х+20) · 0,01) = 1512. Уравнение получилось громоздким. Тем интереснее показать учащимся его решение безе микрокалькулятора. Разделив обе части уравнения на 3150 и упростив выражение во второй скобке, получим (1 – 0,01х)(0,8 – 0,01х) = 0,48.

Вынесем из каждой скобки число 0,01: 0,01(100 – х) · 0,01(80 – х) = 0,48.

Теперь легко избавится от дробей, поделив обе части уравнения на 0,0001:

(100 – х)(80 – х) = 4800.

Итак, пришли к квадратному уравнению с целыми коэффициентами х² - 180х + 3200 = 0, корни которого вычисляются устно

х1,2 = 90±√8100 – 3200, т.е. х1 = 90+√4900, х2 = 90-√4900. Итак, х1=160, х2=20.

Первый корень не подходит по смыслу задачи (иначе продавец раздавал бы товар, приплачивая при этом еще 60% его стоимости). Найдя значение выражения 3150 · (1 – х · 0,01) при х=20, получим ответ: цена товара после первого снижения станет равной 2520 руб.

**Домашнее задание**

**Задача 1.** Какой процент ежегодного дохода давал банк, если, положив на счет 13000 руб., вкладчик через два года получил 15730 руб.?

**Задача 2.** Цена товара после двух последовательных снижений на один и тот же процент уменьшилась со 125 до 80 руб. На сколько процентов снижалась цена каждый раз?

**Литература**

1. Захарова А.Е. Несколько задач «про цены». // Математика в школе. №8. 2002. стр. 34-35.

**Урок 9. Формулы сложных процентов в задачах с**

**финансово - экономическим содержанием. (Приложение № 9)**

Урок начинается кратким вступлением учителя: «Задачи, которые будут рассмотрены сегодня, взяты из жизни. Наша цель – научиться анализировать реальные ситуации с помощью того математического аппарата, которым, вы, ребята, владеете. Очень важно, чтобы вы не только получали ответ, но и могли его истолковать, соотнести с реальностью. Надеюсь, что вам помогут знания, полученные на этом уроке, в вашей дальнейшей жизни».

На **первом** этапе урока идет повторение теоретического материала по следующим вопросам [ожидаемые ответы каждого вопроса записываются в квадратных скобках].

Запишите на доске сложных процентов и ее частный случай. [An = A0 · (1 ± 0,01x1) · …· (1 ± ±0,01xn); An = A0 · (1 ± 0,01x)ⁿ.]

Объясните смысл входящих в формулу символов. [A0 – начальное значение некоторой величины; An – значение, которое получилось в результате нескольких изменений начальной величины; n – количество изменений начальной величины; х – процент изменения].

Когда применяется общая формула, а когда – ее частный случай? [Частный случай применяется тогда, когда некоторая величина A0 изменяется несколько раз на один и тот же процент. Общая формула используется тогда, когда процент изменения не остается одним и тем же].

В каких случаях в формуле сложных процентов ставим знак «-», в каких «+»? Приведите примеры. [Знак «плюс» применяется в задачах о начислении процентов по вкладу в банке, а также при подсчете увеличения цены товара. Знак «минус» применяется при подсчете снижения цены].

Запишите формулу процентного сравнения. [A>B на ((А-В) / В · 100)%; В<А на ((А-В) / А х х100)%].

**Второй** этап урока посвящается проверке домашнего задания. Вызванные ученики оформили свои решения на доске на первом этапе урока, когда со всем классом шла беседа.

**Домашняя задача №1.**

Какой процент ежегодного дохода давал банк, если, положив на счет 13 000 руб., вкладчик через 2 года получил 15 730 руб.?

Решение. А2 = А0(1 + 0,01х)²,

15 730 = 13 000(1 + 0,01х)²,

(1 + 0,01х)² = 1,21,

1 + 0,01х = 1,1 или 1 + 0,01х = -1,1;

х1 = 10, х2 = -210 – не подходит по смыслу задачи.

Ответ: банк давал 10% годового дохода.

Сверив свое решение с решениями других ребят, учитель задает *дополнительные вопросы*:

Почему не подходит корень х2 = -210? [Сумма вклада увеличивается, и поэтому процент изменения не может быть отрицательным].

За счет чего банк имеет возможность выплачивать вознаграждение вкладчику? [Полученные от вклада деньги банк использует для выдачи кредитов организациям и частным лицам под проценты. Банк при этом сам получает прибыль и делится частью этой прибыли с вкладчиком].

А если бы х2 был равен 210? Мы тоже отбросили бы этот корень? [Да, так как это означало бы, что банк выплачивает 210% годовых. Такой процент нереален. Ни один банк не будет давать вкладчику за год в качестве процентных отчислений сумму, которая вдвое превышает сам вклад].

Кроме банка, какие предприятия или частные лица занимаются подобной финансово-кредитной деятельностью? [Ломбард – выдает деньги в залог сданных вещей, выкупать которые приходится за большую цену. Ростовщик – человек, дающий деньги «в рост», т.е. в долг с обязательством выплачивать проценты].

**Домашняя задача №2.**

Цена товара после двух последовательных снижений на один и тот же процент уменьшилась с 125 до 80 руб. На сколько процентов снижалась цена каждый раз?

Решение. А2 = А0(1 + 0,01х)²,

80 = 125(1 – 0,01х)².

(1 – 0,01х)² = 0,64,

1 – 0,01х = 0,8 или 1 – 0,01 = -0,8;

х1 = 20, х2 = 180 – не подходит по смыслу задачи.

Ответ: цена снижалась два раза на 20%.

**Дополнительные вопросы.**

Как реально выглядела бы ситуация, если бы цену снизили на 180%? [Покупатель получил бы товар бесплатно и еще 80% от его стоимости].

Можно ли сказать, что в итоге цена снижена на 40%? [Нет, так как вторая скидка была сделана с иной (меньшей) суммы, а проценты разных величин складывать нельзя].

А если бы снизили цена сразу на 40%, то в итоге цена была бы больше 80 руб. или меньше? [Цена была бы меньше 80 руб. В самом деле: 125 – 1,25 · 40 = =125 – 50 = 75 (руб.)].

**Третий** и главный этап урока – это решение задач.

**Задача 1.** В осенне-зимний период цена на свежие фрукты возрастала трижды: на 10%, на 20% и на 25%. На сколько процентов возросла зимняя цена по сравнению с летней?

Решение. Обозначим первоначальную летнюю цену за A0, а окончательную через А3, так как она установилась после трех изменений. По условию А3 = A0 · (1 + 0,01 · 10) · (1 + 0,01 · 20) · (1 + +0,01· 25), т.е. А3 = A0 · 1,1 · 1,2 · 1,25, или А3 = A0 · 1,65.

По формуле процентного сравнения (А3-A0) / A0 · 100% = (1,65 · A0 - A0) / A0 · 100% = 65%.

Ответ: цена возросла на 65%.

Решение оформляется на доске и в тетрадях.

**Дополнительные вопросы.**

Итак, мы доказали, что зимняя цена больше летней на 65%. А можно ли сказать, что летняя цена ниже зимней на 65%? [Нет, так сказать нельзя. В задаче зимняя цена сравнивается с летней и летняя цена берется за 100%. А если сравнивать с зимней ценою, то ее придется взять за 100%. А эта цена больше].

**Задача 2.** Владелец магазина купил товар по себестоимости: 51,2 руб. за единицу товара. На пути к прилавку цена поднималась трижды на один и тот же процент. Товар продавался плохо, и коммерсант распорядился трижды сделать скидку на тот же самый процент. В итоге цена оказалась равной 21,6 руб. Найти процент изменения цены.

Решение. Обозначим первоначальную цену через A0, а цену после трехкратного повышения через А3, а после троекратного понижения – через А6. Отразим условие схемой, на которой х означает процент изменения цены (сначала повышения, потом понижения).

A0 · (1 + 0,01х)³ А3 · (1 – 0,01х)³ А6

51,2 21,6.

Из схемы видно, что А3 = 51,2 · (1 + 0,01х)³ играет роль начальной цены на этом этапе троекратного понижения, т.е. А6 = А3 · (1 – 0,01х)³. Таким образом, приходим к уравнению 21,6 = 51,2(1 + 0,01х)³ · (1 – 0,01х)³.

Учащиеся записывают на доске последовательность преобразований. Покажем ее слева, а справа приведем комментарии для учителя.

**Таблица 14**

|  |  |
| --- | --- |
| **Решение** | **Комментарии** |
| 21,6 = 51,2((1 + 0,01х) (1 – 0,01х))³  216 = 512 ((1 – (0,01х)²)³ | Повторяем формулу разности квадратов. Делим обе части уравнения на 512. |
| ((1 – (0,01х)²)³ = 216/512  ((1 – (0,01х)²)³ = (6/8)³ | Не торопимся сокращать дробь 216/512. представляем ее в виде куба. Извлекаем кубический корень из обеих частей уравнения. |
| 1 – (0,01х)² = 0,75  (0,01х)² = 0,25  0,01х = 0,5 или 0,01х = -0,5 – не подходит по смыслу | Переводим обыкновенную дробь в десятичную, поскольку все практические расчеты выполняются в десятичных дробях. |

Ответ: цену изменили на 50%.

**Дополнительные вопросы.**

Можете ли вы объяснить, почему повышается цена на пути товара от производителя к потребителю? [Цена поднимается из-за налогов, из-за того, что оплачиваются услуги продавцов, водителей, оформителей документации (сертификаты, декларации) и т.д. Наконец, и сам предприниматель должен получить прибыль].

Как вы думаете, что произойдет с владельцем этого магазина? [Скорее всего, он разорится, так как торгует себе в убыток].

Какой экономический вывод можно сделать из описанной в задаче ситуации? [Завышение цены в погоне за прибылью ведет к снижению товарооборота, что негативно влияет на экономические процессы].

В конце урока учитель анализирует с учащимися еще одну задачу.

**Задача 3.** На предприятии выработка продукции возросла за год на 4%, а на следующий год повысилась еще на 8%. Найти средний годовой прирост за эти два года.

**Предварительный вопрос.**

Можно ли дать ответ, вычислив среднее арифметическое (8+4) / 2 = 6%? [Нет, так как во втором случае находим процент от большей величины].

Учитель разбирает с классом идею решения (ребята ничего не записывают):

с одной стороны, А2 = А0 · (1 + 0,04) · (1 + 0,08),

с другой стороны, А2 = А0 · (1 + 0,01х)², где х – средний одинаковый для каждого года, процент прироста продукции.

Выполнить письменное решение задачи учащимся предлагается дома.

**Литература**

1. Фирсова М.М. Урок решения задач с экономическим содержанием. // Математика в школе. №8. 2002. стр. 36-38.

**Урок 10-11. Геометрическая прогрессия в экономике.**

**(*Приложение № 10-11*)**

В начале урока учитель говорит примерно следующее: «Геометрическая прогрессия имеет очень широкое применение в экономике. С ее помощью банк производит расчеты с вкладчиком, решает, стоит ли вкладывать в крупные проекты, доход от которых будет получен через несколько лет и т.д. Мы на уроке рассмотрим только один вопрос: как банки дают кредиты различным фирмам и как система банков может значительно увеличить возможности кредитования фирм?»

Класс разбивается на пять групп, каждая из которых представляет один из банков: «Алмаз», «Берилл», «Изумруд», «Сапфир» и «Сердолик». Представители первых четырех банков напоминают основные определения (таблица 15).

**Таблица 15**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Определение геометрической прогрессии | Формула общего члена геометрической прогрессии:  аn = a1qⁿ ˉ ¹ | Сумма первых n членов геометрической прогрессии:  Sn = a1 (1 - qⁿ) / (1 – q) | Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Смысл ее суммы:  S = a1 / (1 – q) |

Представитель пятого банка демонстрирует схему-структуру банковской системы России (рисунок 1) и рассказывает об обязательных и свободных резервах коммерческих банков.

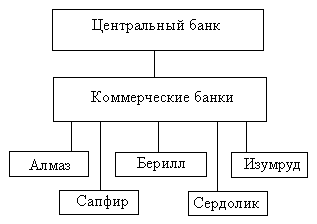


Рис. 1

Дело в том, что Центральный банк России (ЦБ) руководит работой всех коммерческих банков, которые принимают деньги у населения, фирм, объединений и т.д., а также выдают кредиты. По закону о банках каждый коммерческий банк обязан часть поступающих к нему денег хранить в ЦБ, который ими распоряжается. Это так называемые *обязательные резервы* банка. Они устанавливаются как определенный процент от суммы вклада, поступившего в банк. Остальными деньгами – *свободными резервами* – банк распоряжается самостоятельно: может дать в кредит, может купить на них ценные бумаги и т.д.

**Пример 1.** Пусть некоторый вкладчик внес в коммерческий банк сумму, равную 500 00 руб., а процентная ставка обязательных ресурсов установлена на уровне Р = 15%. Найдите обязательные и свободные резервы от этой суммы.

Решение. Обязательные резервы составляют 15%, поэтому они равны 500 000 · 0,15 = 75 000 (руб.). свободные резервы составляют 85%, т.е. 500 000 · 0,85 = 425 000 = 500 000 – 75 000 (руб.).

Пяти группам – представителям банков – предлагается найти обязательные и свободные резервы своих банков с учетом условий:

1. в банк «Алмаз» поступило S0 = 20 000 руб., Р = 20%;
2. в банк «Берилл» поступило S0 = 45 000 руб., Р = 15%;
3. в банк «Изумруд» поступило S0 = 90 000 руб., Р = 12%;
4. в банк «Сапфир» поступило S0 = 10 000 руб., Р = 22%;
5. в банк «Сердолик» поступило S0 = 12 000 руб., Р = 18%.

Результаты вычислений заносим в таблицу 2.

**Таблица 16**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Банк** | **Обязательные резервы** | **Свободные резервы** |
| 1 | «Алмаз» | 20 000 · 0,2 = 4000 | 20 000 · 0,8 = 16 000 |
| 2 | «Берилл» | 45 000 · 0,15 = 6750 | 45 000 · 0,85 = 38 250 |
| 3 | «Изумруд» | 90 000 · 0,12 = 10 800 | 90 000 · 0,88 = 79 200 |
| 4 | «Сапфир» | 10 000 · 0,22 = 2200 | 10 000 · ,078 = 7800 |
| 5 | «Сердолик» | 12 000 · 0,18 = 2160 | 12 000 · 0,82 = 9840 |

В классе обсуждается вопрос: «От чего и как зависит величина свободных и обязательных резервов, и может ли ЦБ влиять на размер кредитов, предоставляемых банками?» учитель подводит итог дискуссии: существует прямая зависимость величины свободных резервов от суммы вклада в банк, а каждый банк может выдавать кредитов на сумму, не превышающую величины его свободных резервов. ЦБ может активно влиять на величину кредитов, предоставляемых коммерческими банками: увеличивая долю обязательных резервов, он уменьшает величину кредитов, предоставляемых каждым банком и наоборот. В заключение классу предлагается записать величины обязательных и свободных резервов в общем виде.

Пусть сумма вклада – S0 руб., процентная ставка – Р%. Тогда величина обязательных резервов равна S1 = S0Р / 100, а свободных резервов – S2 = S0 (100 – Р) / 100 = S0 - S1.

Теперь рассмотрим систему, состоящую из перечисленных выше банков. Пусть процентная ставка обязательных резервов равна 20%, и в первый банк «Алмаз» внесен вклад, равный 400000 руб. Сделаем упрощающее предположение: каждый банк все свои свободные резервы целиком выдает в кредит только одному заемщику.

К доске выходит представитель банка «Алмаз» и производит расчеты: 20% от суммы, полученной банком, составляют обязательные резервы 400 000 · 0,2 = 80 000 (руб.), которые перечисляются в ЦБ. Свои свободные резервы в размере 400 000 – 80 000 = 320 000 (руб.) банк выдает клиенту Х. На эти деньги клиент Х приобретает у некоторой фирмы необходимые ему товары. Полученные 320 000 руб. фирма переводит в обслуживающий ее банк «Берилл». Изобразим схематически описанную ситуацию (рисунок 2).

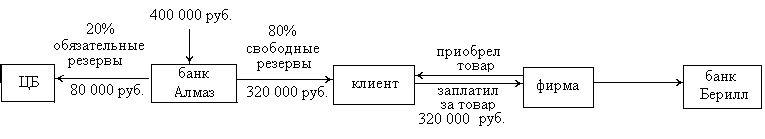


Рис. 2

В результате проделанных операций банк «Берилл» получил вклад в размере 320 000 руб. и с полученными деньгами он произвел те же операции, что и банк «Алмаз».

Ученик – представитель банка «Берилл» - делает необходимые расчеты: 20% от полученной суммы составляют обязательные резервы 320 000 · 0,2 = 64 000 (руб.) и перечисляются в ЦБ, а оставшиеся 320 000 – 64 000 = 256 000 (руб.) составляют свободные резервы банка, которые он выдает в качестве кредита клиенту Y. После торговых сделок клиента эта сумма вкладывается в банк «Изумруд». По такой же схеме свободные резервы банка «Изумруд» уходят в банк «Сапфир», а его – в банк «Сердолик».

Представители банков по очереди производят расчеты своих финансовых операций и в итоге составляют сводную таблицу 3.

**Таблица 17**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Банк** | **Сумма**  **вклада** | **Обязательные**  **резервы** | **Свободные резервы – кредиты (руб.)** |
| 1 | «Алмаз» | 400 000 | 80 000 | 320 000 |
| 2 | «Берилл» | 320 000 | 64 000 | 256 000 |
| 3 | «Изумруд» | 256 000 | 51 200 | 204 800 |
| 4 | «Сапфир» | 204 800 | 40 960 | 163 840 |
| 5 | «Сердолик» | 163 840 | 32 768 | 131 072 |

Вычислим суммарный объем кредитов, выданных рассматриваемой системой банков. для этого достаточно сложить числа, стоящие в правом столбце таблицы 3, полученная сумма равна 1 075 712 руб. Учитель ставит задачу: как можно упростить и тем самым ускорить операцию подсчета суммы выданных кредитов. Ученики должны из анализа расчета финансовых операций каждого банка сделать вывод, что свободные резервы системы банков образуют последовательность 320 000; 320 000 · 0,8; 320 000 · (0,8)²; 320 000 · (0,8)³; 320 000 · (0,8), т.е. первые пять членов геометрической прогрессии с первым членом 320 000 и знаменателем 0,8. Пользуясь формулой суммы конечного числа первых членов геометрической прогрессии, получаем

S5 **=** a1 (1 - q) / (1 – q) = 320 000 (1 – 0,8) / (1 – 0,8) = 1 075 712 (руб.)

S5 **=** a1(1 - q) (1 – q) = 320 000(1– 0,8)(1– 0,8) = 1075712 (руб.)

Полученная сумма кредитов оказалась в ≈3,36 раза больше той суммы, которую мог предоставить один банк «Алмаз»!

У учащихся, естественно, возникает следующий вопрос: «Мы рассмотрели систему, состоящую из пяти банков, а что будет, если число банков станет увеличиваться и свободные резервы банка «Сердолик» попадут в банк «Лазурит», свободные резервы банка «Лазурит» - в банк «Малахит» и т.д.?» ясно, что суммарная величина кредитов будет при этом возрастать. Выясним характер этого возрастания, если система будет содержать n банков, то

Sn = 320 000 (1 – 0,8ⁿ) / (1 – 0,8) = 1 600 000 – 1 600 000 · 0,8ⁿ.

Из этого представления следует, что с увеличением n величина Sn, возрастая, будет оставаться меньше числа 1600000 и по мере увеличения n будет к нему приближаться, никогда не достигая значения 1600000.

**Пример 2.** Три ученика у доски с помощью калькулятора вычисляют Sn при n = 10, n = 20 и n = 40.

S10 =1 600 000 – 1 600 000 · 0,8 ≈ 1 600 000 – 1 600 000 · 0,1074 = =1 600 000 – 171 840 = 1 428 160 (руб.);

S20 = 1 600 000 – 1 600 000 · 0,8 ≈ 1 600 000- 1 600 000 · 0,0115 = =1 600 000 – 18 400 = 1 581 600 (руб.);

S40 = 1600000 – 1600000 · 0,8 ≈ 1 600 000 – 1 600 000 · 0,000133 = =1 600 000 – 212,8 = 1 599 787,2 (руб.).

Анализируя результаты решения, ученики еще раз убеждаются в том, что, чем больше число n, тем меньше величина Sn отличается от постоянного числа 1 600 000 руб.

Перед учащимися ставится следующая задача: обобщить полученный результат на случай произвольных значений а и q. Вызванный к доске ученик записывает общую формулу Sn = a1(1 - qⁿ)/(1 – q) = a1 /(1 – q) - a1 qⁿ / (1 – q).

Следующие две задачи иллюстрируют ее применение.

**Задача 1.** Система состоит из трех банков А1, А2 и А3. В первый банк А1 внесен вклад 200000 руб. процентная ставка обязательных резервов составляет 15% годовых. Какова максимальная сумма кредитов, которую может выдать эта система?

Решение. В этом случае n = 3, S0 = 200 000 руб., q = 0,85. Обязательные резервы банка А1 составляют 15%, т.е. 200 000 · 0,15 = 30 000 (руб.). Величина свободных резервов банка составляет 200 000 – 30 000 = 170 000 (руб.). Найдем

S3 = 170 000 (1 – 0,85³) / (1 – 0,85) ≈437 325 (руб.).

**Задача 2.** Система состоит из шести банков В1, В2, В3, В4, В5 и В6. В банк В1 внесен вклад 300 000 руб., процентная ставка обязательных резервов составляет 10%. На какую максимальную сумму может выдать кредиты эта система банков?

Решение. Пусть n = 6, S0 = 300 000 руб., q = 0,9. Обязательные резервы банка В1 равны 300000 · 0,1 = 30 000 (руб.) и поэтому его свободные резервы составляют 300 000 – 30 000 = 270 000 (руб.). Тогда

S6 = 270 000 (1 – 0,9) / 1 – 0,9 = 1 256 109,3 (руб.).

Далее рассмотрим случай, когда количество банков в системе будет увеличиваться неограниченно. Конечно, в конкретной банковской системе так не бывает, но математические методы как раз и сильны тем, что с их помощью модно рассматривать предельные возможности, которые не реализуются ни при каком значении n, т.е. можно заглянуть туда, где бессилен любой опыт. Из формулы Sn = a1 / (1 – q) - a1 qⁿ / (1 – q). При 0 < q < 1 следует, что при больших значениях n, величина a1 qⁿ / (1 – q) мала, и ею можно пренебречь. Тогда мы получаем формулу S = a1 / (1 – q).

Это знакомая ученикам формула для нахождения суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Ее экономический смысл состоит в том, что при фиксированных значениях а1 и q она указывает границу, предельные возможности системы. Сколько банков мы бы не включали в нее, выдавать кредитов на сумму, равную или большую числа S = a1 / (1 – q) невозможно. Множитель μ = 1 / (1 – q) экономисты называют мультипликатором (от английского multiply – умножать). В нашем случае мультипликатор показывает, во сколько раз увеличивается величина начального кредита при рассмотрении бесконечной системы банков. Так, при a1 = 320 000 и q = 0,8, имеем μ = 1 / 0,2 = =5 и S = a1 · μ = 320 000 · 5 = 1 600 000 – этот результат мы уже получили выше.

**Задача 3.** В первый банк некоторой системы банков внесен вклад размером С руб. Процентная ставка обязательных резервов составляет Р%. Сколько банков должно быть в системе, чтобы их суммарная возможность кредитования была не менее заданной величины S0. решите задачу при следующих данных:

а) С = 30 000 руб., Р = 10%, S0 = 92 853 руб.;

б) С = 100 000 руб., Р = 20%, S0 = 268 928 руб.;

в) С = 2 700 руб., Р = 15%, S0 = 10 000 руб.;

г) С = 4 000 руб., Р = 25%, S0 = 13 000 руб.

Решение. а) Искомое число n находится из условия Sn = a1 (1 - qⁿ) / (1 – q) ≥ S0, где а1 = =30000 – 30000 · 0,1 = 27 000, q = 0,9, S0 = 92 853. Решаем неравенство 27 000 (1 – 0,9ⁿ) / (1 – 0,9) ≥ 92 853.

Отсюда получаем 270 000 (1 – 0,9ⁿ) ≥ 92 853, 1 – 0,9ⁿ ≤ 0,3439, или 0,9ⁿ ≤ 0,6561.

Подбором находим, что n ≤ 4, т.е. система должна содержать не менее четырех банков.

б) n ≤ 5.

в) n ≥ 7.

г) Попытка действовать по шаблону к решению не приводит. Неравенство Sn = 3000(1 – - 0,75ⁿ) / (1 – 0,75) ≥ 13000 сводится к неравенству 0,75ⁿ ≤ - 1/12, которое противоречиво. Это означает, что ни при каком значении n исходное неравенство не справедливо – выдать кредитов на сумму 130 000 руб. рассматриваемая система не в состоянии. Вычислим ее предельные возможности. В нашем случае, а = 4000 – 4000 · 0,25 = 3000 (руб.), q = 0,75 и величина S = a1 / (1 – q) = 300 / (1 – 0,75) = 120000 < 130000.

В заключении учитель вместе с учениками подводит итог. Он говорит, что на этом уроке они увидели, каким образом приобретенные знания по математике могут быть использованы сразу для решения важных задач современной экономики. Оказывается, что такие, на первый взгляд, бесполезные вопросы, как сумма членов геометрической прогрессии, бесконечно убывающая прогрессия и ее сумма, имеют глубокий экономический смысл. Более того, решая задачу о нахождении суммы n членов геометрической прогрессии, фактически нашли возможности суммарного кредитования, предоставляемых системой, состоящей из n банков.

В качестве индивидуального задания на дом каждому ученику предлагается:

1. сочинить систему, состоящую из шести банков;
2. назначить сумму, поступившую в первый банк системы;
3. назначить процентную ставку обязательных резервов;
4. составить таблицу, аналогичную таблице 3;
5. вычислить Sn – суммарную величину кредитов, которые может предложить ваша система банков;
6. определить предельные возможности кредитования для построенной Вами системы банков.

Мы предполагали, что вклады производятся в различные банки. Это вовсе необязательно: все вклады могли поступать в один банк, но тогда нужно было бы следить за количеством этих вкладов, что не всегда удобно с методической точки зрения.

Также это наглядно показывает ученику необходимость функционирования сложной системы коммерческих банков. Ведь только с ее помощью некоторая сумма денег может «вырасти» в несколько раз, участвуя во многих сделках. А чем больше кредитов будут выдавать банки, тем, в конечном итоге, богаче будет наша страна.

**Литература**

1. Инютина Е.В., Симонов А.С. Геометрическая прогрессия в экономике. // Математика в школе. №5. 2001. стр. 17-21.

**Урок 12. Защита проектов.**

**(*Приложение №12 Образцы проектных работ учащихся*)**

**Литература:**

1. «Математика в школе» №5, 2001, №1, №8, 2002, №5, №8, №10, 2003.
2. Симоненко В.Д. и др. Технология. Трудовое обучение: Учебник для учащихся 8 класса общеобразовательной школы. / Под ред. Симоненко. – М.: «Вентана-Граф», 1999.
3. Я познаю мир: Детская энциклопедия: Математика. – М.: ООО «Издательство АСТ», 2001.